ŠIFRA KANDIDATA _ _ _ _ _

Zadatak 1. Radnik završi 40% nekog posla za 3 sata. Da završi $\frac{3}{5}$ tog posla (radeći pod istim uvjetima), potrebno mu je:

a) 4 sata	b) 4.5 sata	c) 5 sati	d) 5.5 sati	e) nijedan od odgovora a), b), c) i d)

Rješenje:
Procenat urađenog posla je direktno proporcionalan vremenu. Označimo sa x vrijeme, a sa y procenat urađenog posla. Dakle, $y = ax$. Iz uslova zadatka je:

$$y = 40,\ x = 3 \quad \Rightarrow \quad a = \frac{40}{3}$$

Primijetimo da su $\frac{3}{5}$ posla ustvari 60% tog posla ($\frac{3}{5} \cdot 100\% = 60\%$).

Za $y = 60$ imamo $x = \frac{y}{a} = \frac{60}{\frac{40}{3}} = 4.5$. Dakle, potrebno je 4.5 sati da se urade $\frac{3}{5}$ tog posla.

Zadatak 2. Zbir tri broja je 80. Ako podijelimo prvi broj sa drugim dobije se količnik 3 i ostatak 3, a ako se treći broj podijeli s prvim opet se dobije količnik 3 i ostatak 3. Nijedan od brojeva nije jednak nuli. Razlika drugog i trećeg broja sabrana sa prvim brojem je:

a) 41	b) 53	c) 70	d) 71	e) nijedan od odgovora a), b), c) i d)

Rješenje:
Tekstualni problem u postavljenom zadatku je ekvivalentan sa sljedećim sistemom linearnih jednačina:

$$x + y + z = 80,\ \ \frac{x}{y} = 3 + \frac{3}{y},\ \ \frac{z}{x} = 3 + \frac{3}{x}.$$

Množenjem druge jednačine sa *y*, a treće sa *x*, dobije se sistem jednačina
$x + y + z = 80$; $x - 3y = 3$; $-3x + z = 3$ koji je ekvivalentan prethodnom sistemu.

Oduzimanjem treće jednačine posljednjeg sistema od prve, i množenjem dobijene jednačine sa 3, dobije se jednačina $12x + 3y = 231$.

Sabiranjem druge jednačine pretposljednjeg sistema i posljednje jednačine dobije se $13x = 234$ odnosno $x = 18$.

Uvrštavanjem u pogodne jednačine dobije se lako $y = 5$ i $z = 57$.

Tražena razlika prva dva broja sabrana sa trećim brojem je $18 - 5 + 57 = 70$.

Zadatak 3. Rješenje (u skupu realnih brojeva) nejednačine $\frac{3-5x}{2x-1} \geq 2$ je svaki realan broj x za koji je:

a) $x \in \left(\frac{1}{2}, \frac{9}{5}\right]$ b) $x \in \left(\frac{1}{2}, \frac{5}{9}\right)$ c) $x \in \left[\frac{1}{2}, \frac{5}{9}\right]$ d) $x \in \left(\frac{1}{2}, \frac{5}{9}\right]$ e) nijedan od odgovora a), b), c) i d)

Rješenje:

Zadana nejednačina je definirana za sve realne brojeve x za koje je $2x-1 \neq 0 \Rightarrow x \neq \frac{1}{2}$.

Imamo da vrijedi:

$$\frac{3-5x}{2x-1} \geq 2 \Leftrightarrow \frac{3-5x}{2x-1} - 2 \geq 0 \Leftrightarrow \frac{3-5x-4x+2}{2x-1} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{5-9x}{2x-1} \geq 0.$$

	$-\infty$ $\frac{1}{2}$	$\frac{5}{9}$	∞
5-9x	+	+	-
2x-1	-	+	+
Q(x)	-	+	-

Zbog definicionog područja vidimo da je rješenje zadane nejednačine svaki realni broj $x \in \left(\frac{1}{2}, \frac{5}{9}\right]$.

Zadatak 4. Najmanji prirodan broj x za koji vrijedi $|x-2| < x+1$ je:

a) 0 b) 1/2 c) 1 d) 2 e) nijedan od odgovora a), b), c) i d)

Rješenje:

Prvo primijetimo da je: $|x-2| = \begin{cases} x-2, & za \quad x \geq 2 \\ -(x-2), & za \quad x < 2 \end{cases}$.

U slučaju $x \geq 2$ jednačina se reducira na $x-2 < x+1 \Leftrightarrow 0 < 3$, pa je rješenje prvog slučaja dato sa $x \in [2, +\infty)$.

U slučaju $x < 2$ jednačina se reducira na $-(x-2) < x+1 \Leftrightarrow x > \frac{1}{2}$, pa je rješenje drugog slučaja dato sa $x \in (-\infty, 2) \cap \left(\frac{1}{2}, +\infty\right) = \left(\frac{1}{2}, 2\right)$.

Konačan rezultat je unija dva dobivena intervala, dakle $x \in [2, +\infty) \cup \left(\frac{1}{2}, 2\right) = \left(\frac{1}{2}, +\infty\right)$.

Najmanji prirodan broj koji zadovoljava zadatu nejednačinu je 1.

Zadatak 5. Polinom $P(x)=2x^5+ax^4-x^3+bx^2-7x+2$, gdje su a i b realni paramteri, je djeljiv polinomom $Q(x)=x^2+x-2$. Ostatak pri dijeljenju polinoma $P(x)$ s polinomom $R(x)=x-3$ je:

a) 618 b) 208 c) 520 d) 216 e) nijedan od odgovora a), b), c) i d)

Rješenje:

Nule polinoma $Q(x)=x^2+x-2$ su očito 1 i -2, pa iz uslova da je zadani polinom $P(x)=2x^5+ax^4-x^3+bx^2-7x+2$ djeljiv polinomom $Q(x)=x^2+x-2$ slijedi da su 1 i -2 nule i polinoma $P(x)$, tj. da vrijedi $P(1)=0$ i $P(-2)=0$. Dakle, dobijemo sistem jednačina $2+a-1+b-7+2=0$, $2(-2)^5+a(-2)^4-(-2)^3+b(-2)^2-7\cdot(-2)+2=0$, čije je rješenje (a, b) = (2,2). Dakle, zadani polinom ima oblik $P(x)=2x^5+2x^4-x^3+2x^2-7x+2$, odakle (prema Bezoutovom stavu) slijedi da je ostatak pri dijeljenju polinoma $P(x)$ s polinomom $R(x)=x-3$ jednak broju $P(3)$. No, $P(3)=2\cdot 3^5+2\cdot 3^4-3^3+2\cdot 3^2-7\cdot 3+2=620$.

Zadatak 6. Ako je $f^{-1}(x)=\dfrac{3x-2}{2x+3}$, onda je $f\left(\dfrac{1}{x}\right)$ jednako:

a) $\dfrac{2x+3}{3x-2}$ b) $\dfrac{2x-3}{3x+2}$ c) $\dfrac{2+3x}{3-2x}$ d) $\dfrac{3x+2}{3x-2}$ e) nijedan od odgovora a), b), c) i d)

Rješenje:

Iz $f^{-1}(x)=\dfrac{3x-2}{2x+3}=y$ (uz uslov da je $2x+3\neq 0$) slijedi da je $3x-2=2xy+3y$, odakle je

$x=\dfrac{2+3y}{3-2y}=f(y)$, pa je $f\left(\dfrac{1}{x}\right)=\dfrac{2+\frac{3}{x}}{3-\frac{2}{x}}=\dfrac{2x+3}{3x-2}$ (uz uslov da je $x\neq 0, x\neq \dfrac{2}{3}$).

Zadatak 7. Površina baze pravilne trostrane prizme je $\sqrt{3}\,\mathrm{dm}^2$, zapremina te prizme je $5\sqrt{3}\,\mathrm{dm}^3$. Omjer visine prizme i stranice baze te prizme je:

a) 2:5	b) 5:2	c) 1:5	d) 5:1	e) nijedan od odgovora a), b), c) i d)

Rješenje:
Pravilna trostrana prizma je prizma čija je baza jednakostranični trougao. Iz uslova zadatka je: $B=\frac{a^2\sqrt{3}}{4}=\sqrt{3}\Rightarrow\frac{a^2}{4}=1\Rightarrow a=2\,\mathrm{dm}$, a kako je $V=B\cdot H=\sqrt{3}\cdot H=5\sqrt{3}\,\mathrm{dm}^3$, slijedi da je $H=5\,\mathrm{dm}$. Sada je $H:a=5:2$.

Zadatak 8. Vrijednosti realnih parametara p i q takvih da funkcija $y=x^2-2px-q$ ima minimalnu vrijednost 3 za $x=-1$ su:

a) $p=-1$, $q=4$	b) $p=1$, $q=4$	c) $p=1$, $q=-4$	d) $p=-1$, $q=-4$	e) nijedan od odgovora a), b), c) i d)

Rješenje:
Kvadratna funkcija $y=ax^2+bx+c$ za $a>0$ ima minimalnu vrijednost u tjemenu $D=\left(\frac{-b}{2a},\frac{-\left(b^2-4ac\right)}{4a}\right)$. U konkretnom slučaju je $a=1$, $b=-2p$, $c=-q$, pa iz $\left(\frac{2p}{2},\frac{-4p^2-4q}{4}\right)=\left(p,-p^2-q\right)=\left(-1,3\right)$ slijedi da je $p=-1$ i $q=-4$.

Zadatak 9. Sve vrijednosti realnog parametra m za koje su rješenja kvadratne jednačine $x^2+3mx+m-3=0$ oba iz skupa realnih brojeva i suprotnog znaka zadane su sa:

a) $m>3$	b) $m<3$	c) $m>0$	d) $m<0$	e) nijedan od odgovora a), b), c) i d)

Rješenje:
Da bi rješenja bila suprotnog znaka njihov proizvod mora biti negativan. Vietovo pravilo za ovaj slučaj glasi $x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a} = \frac{m-3}{1} < 0$ odnosno za $m<3$ je zadovoljen uslov da rješenja budu suprotnog znaka.
Da bi rješenja bila realna diskriminanta kvadratne jednačine mora biti veća od nule. Kako je $\frac{c}{a}<0$ to mora vrijediti i $c \cdot a < 0$, pa je uslov $D=b^2-4ac>0$ svakako zadovoljen.

Zadatak 10. Rješenje jednačine $\sqrt[3]{2^{1-x}} \cdot 0.125^{-x-1} = 0.5^2 \cdot \sqrt{0.5^x}$ je:

a) $x=1$	b) $x=0$	c) $x=-1$	d) $x=-\frac{32}{19}$	e) nijedan od odgovora a), b), c) i d)

Rješenje:
Data jednačina je definisana na čitavom skupu realnih brojeva i može se transformisati na sljedeći način

$$2^{\frac{1-x}{3}} \cdot \left(2^{-3}\right)^{-x-1} = \left(2^{-1}\right)^2 \cdot \left(2^{-1}\right)^{\frac{x}{2}} \Leftrightarrow 2^{\frac{1-x}{3}+3x+3} = 2^{-2-\frac{x}{2}} \Leftrightarrow \frac{1-x}{3}+3x+3=-2-\frac{x}{2} \Leftrightarrow x=-\frac{32}{19},$$

što je traženo rješenje date jednačine.

Zadatak 11. Sva rješenja (u skupu realnih brojeva) jednačine $\log_3 \sqrt{x-5} + \frac{1}{2}\log_3 (2x-3) - 1 = 0$ su:

a) $x \in \left\{\frac{1}{2}, 6\right\}$	b) $x \in \{6, 9\}$	c) $x \in \emptyset$	d) $x \in \{6\}$	e) nijedan od odgovora a), b), c) i d)

Rješenje:
Definiciono područje date jednačine je određeno uslovima $x-5>0$ i $2x-3>0$, pa dakle $x \in (5, +\infty)$. Jednačina se može svesti na kvadratnu jednačinu na sljedeći način

$$\log_3 \sqrt{(x-5)(2x-3)} = 1$$

$$\sqrt{(x-5)(2x-3)} = 3$$

$$2x^2 - 13x + 6 = 0.$$

Posljednja jednačina ima dva rješenja $x_1 = 1/2$ i $x_2 = 6.$ No, samo drugo rješenje pripada definicionom području početne jednačine, pa je to i njeno jedino rješenju u skupu realnih brojeva.

Zadatak 12. Ako je $\cos\alpha = \frac{3}{5}$ i $\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$, onda je $\sin\alpha$ jednako:

a) $-\frac{4}{5}$	b) $\frac{4}{5}$	c) $\pm\frac{4}{5}$	d) $\pm\frac{1}{5}$	e) nijedan od odgovora a), b), c) i d)

Rješenje:
Iz osnovnog trigonometrijskog identiteta je $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$, pa je $\sin\alpha = \pm\sqrt{1-\cos^2\alpha} = \pm\sqrt{1-\frac{9}{25}} = \pm\frac{4}{5}$, no prema uslovu zadatka traženi ugao je u četvrtom kvadrantu, pa je sinus takvog ugla negativan, dakle $\sin\alpha = -\frac{4}{5}.$

Zadatak 13. Vrijednost izraza $\dfrac{\sin 53^\circ - \sin 37^\circ}{2\cos^2 41^\circ - 1}$ iznosi:

a) $-\sqrt{2}$ b) $\sqrt{2}$ c) $\sqrt{3}$ d) $-\sqrt{3}$ e) nijedan od odgovora a), b), c) i d)

Rješenje:
Izraz možemo transformisati na sljedeći način:

$$\frac{\sin 53^\circ - \sin 37^\circ}{2\cos^2 41^\circ - 1} = \frac{\sin\left(45^\circ + 8^\circ\right) - \sin\left(45^\circ - 8^\circ\right)}{2\cos^2\left(45^\circ - 4^\circ\right) - 1} = \frac{2\cos 45^\circ \sin 8^\circ}{2\left(\cos 45^\circ \cos 4^\circ + \sin 45^\circ \sin 4^\circ\right)^2 - 1}$$

$$= \frac{2\dfrac{\sqrt{2}}{2}\sin 8^\circ}{2\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)^2\left(\cos 4^\circ + \sin 4^\circ\right)^2 - 1} = \frac{\sqrt{2}\sin 8^\circ}{\left(\cos^2 4^\circ + 2\sin 4^\circ \cos 4^\circ + \sin^2 4^\circ\right) - 1} = \frac{\sqrt{2}\sin 8^\circ}{\sin 8^\circ} = \sqrt{2}$$

Zadatak 14. Data je trigonometrijska jednačina $\cos^2 x - \sin^2 x - 3\cos x + 2 = 0$. Sva rješenja na segmentu $\left[0, 2\pi\right]$ date jednačine su:

a) $x \in \left\{0, \dfrac{\pi}{6}, \dfrac{5\pi}{6}, 2\pi\right\}$

b) $x \in \left\{\dfrac{\pi}{3}, \dfrac{5\pi}{3}, 2\pi\right\}$

c) $x \in \left\{0, \dfrac{\pi}{3}, \dfrac{5\pi}{3}, 2\pi\right\}$

d) $x \in \{0, 2\pi\}$

e) nijedan od odgovora a), b), c) i d)

Rješenje:
Primjenom osnovnog trigonometrijskog identiteta jednačina se može napisati u sljedećem obliku $2\cos^2 x - 3\cos x + 1 = 0,$ pa se smjenom $\cos x = t$ transformiše u jednačinu $2t^2 - 3t + 1 = 0,$ čija su rješenja $t_1 = 1/2$ i $t_2 = 1$. Rješenja početne jednačine dobijamo iz jednačina $\cos x = \dfrac{1}{2}$ i $\cos x = 1.$

Vodeći računa o uslovu da tražimo rješenja u segmenu $\left[0, 2\pi\right],$ zaključujemo da je $x_1 = \dfrac{\pi}{3}$, $x_2 = \dfrac{5\pi}{3}$, $x_3 = 0$ i $x_2 = 2\pi.$

Zadatak 15. Prava ima jednačinu $y=-\frac{4}{3}x+4$. Obim trougla kojeg gradi data prava sa koordinatnim osama je:

a) 10 duž. jedinica	b) 11 duž. jedinica	c) 12 duž. jedinica	c) 13 duž. jedinica	e) nijedan od odgovora a), b), c) i d)

Rješenje:
Presječne tačke date prave sa koordinatnim osama dobijemo zahtijevajući da je $x=0$, odnosno $y=0$.
Slijedi da su vrhovi posmatranog trougla $A(0,4)$, $B(3,0)$ i $C(0,0)$.
Posmatrani trougao je pravougli sa katetama dužine 3 i 4 dužne jedinice. Primjenom Pitagorine teoreme zaključujemo da je hipotenuza 5, pa je obim 12 dužnih jedinica.

Zadatak 16. Tačka S čije je rastojanje od prave $y=-2x+3$ jednako $\sqrt{5}$, a jednako je udaljena i od tačaka $M(4,-3)$ i $N(2,-1)$, ima koordinate:

a) $S\left(\frac{16}{3},\frac{5}{3}\right)$ ili $S(2,-5)$	c) $S(1,4)$ ili $S(-1,-4)$	e) nijedan od odgovora a), b), c) i d)
b) $S\left(\frac{13}{3},-\frac{2}{3}\right)$ ili $S(1,-4)$	d) $S(1,4)$ ili $S(2,-5)$	

Rješenje:
Prema poznatojformuli rastojanje $d(S_0,p)$ tačke $S(x_0,y_0)$ od prave čija je jednačina $ax+by+c=0$ zadano je formulom $d(S_0,p)=\left|\frac{ax_0+by_0+c}{\sqrt{a^2+b^2}}\right|$, a rastojanje $d(M_1,M_2)$ između tačaka $M_1(x_1,y_1), M_2(x_2,y_2)$ formulom $d(M_1,M_2)=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}$. Otuda, prema uslovima u posmatranom zadatku, imamo sljedeći sistem jednačina:

$$\left|\frac{2x_0+y_0-3}{\sqrt{2^2+1^2}}\right|=\sqrt{5},\ \sqrt{(x_0-4)^2+(y_0+3)^2}=\sqrt{(x_0-2)^2+(y_0+1)^2}\ ,$$

odakle je $2x_0+y_0-3=\pm 5,\ (x_0)^2-8x_0+16+(y_0)^2+6y_0+9=(x_0)^2-4x_0+4+(y_0)^2+2y_0+1$,

što se svodi na dva sistema $\begin{cases}2x_0+y_0=8\\ x_0-y_0=5\end{cases};\ \begin{cases}2x_0+y_0=-2\\ x_0-y_0=5,\end{cases}$

čijim rješavanjem dobijemo dvije tačke $S\left(\frac{13}{3},-\frac{2}{3}\right)$ ili $S(1,-4)$.

Zadatak 17. Neka je $z = 2i + 1$. Modul kompleksnog broja $s = i^{98} - i^{2015} + \frac{1}{2-\overline{z}}$, gdje je i imaginarna jedinica, je:

a) $\lvert s\rvert = \sqrt{\frac{5}{13}}$	b) $\lvert s\rvert = 1$	c) $\lvert s\rvert = 5$	d) $\lvert s\rvert = \frac{\sqrt{13}}{5}$	e) nijedan od odgovora a), b), c) i d)

Rješenje:
Uvrštavanjem date vrijednosti $z = 2i + 1$ u izraz kojim je definisan kompleksan broj s dobijamo da je:

$$s = i^{98} - i^{2015} + \frac{1}{2 - \overline{2i+1}} = -1 + i + \frac{1}{2-(1-2i)} = -1 + i + \frac{1}{1+2i} \cdot \frac{1-2i}{1-2i} = -1 + i + \frac{1-2i}{5} = -\frac{4}{5} + i\frac{3}{5}$$

pa je $\lvert s\rvert = \sqrt{\left(-\frac{4}{5}\right)^2 + \left(\frac{3}{5}\right)^2} = 1$.

Zadatak 18. U aritmetičkom nizu je $a_2 = 8$ i $a_4 = 18$. Razlika desetog i trećeg člana je:

a) 5	b) 25	c) 35	c) 45	e) nijedan od odgovora a), b), c) i d)

Rješenje:
Za *n*-ti član aritmetičkog niza vrijedi $a_n = a_1 + (n-1) \cdot d$, gdje je a_1 prvi član niza, a d je diferencija niza. Na osnovu uslova zadatka je $8 = a_1 + d$, $18 = a_1 + 3d$, pa je $a_1 = 3$ i $d = 5$.
Slijedi da je $a_{10} - a_3 = a_1 + 9d - (a_1 + 2d) = 7d = 35$.

Zadatak 19. Petocifrenih brojeva u čijem zapisu se nalazi barem jedna cifra 6 je:

a) 37512	b) 52488	c) 28412	d) 30951	e) nijedan od odgovora a), b), c) i d)

Rješenje:
Traženi broj brojeva ćemo odrediti tako što ćemo od ukupnog broja petocifrenih brojeva oduzeti broj petocifrenih brojeva u kojima se ne pojavljuje cifra 6.
Ukupanbroj petocifrenih brojeva je $9 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 90000$, jer se na prvoj mjestu može pojaviti bilo koja cifra iz skupa $\{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$, na drugom mjestu se može pojaviti bilo koja cifra iz istog skupa uz dodatak cifre 0, kao i na preostalim mjestima.
Slično, petocifrenih brojeva koji ne sadrže cifru 6 ima $8 \cdot 9 \cdot 9 \cdot 9 \cdot 9 = 52488$.
Slijedi da petocifrenih brojeva koji sadrže barem jednu cifru 6 ima 90000 - 52488= 37512.

Zadatak 20. Oznaka $a_{(b)}$ je oznaka broja *a* zapisanog u brojnom sistemu s bazom *b*. Suma $333_{(5)} + 213_{(5)}$ jednaka je broju:

a) $250_{(5)}$	b) $1101_{(5)}$	c) $151_{(5)}$	d) $1101_{(2)}$	e) nijedan od odgovora a), b), c) i d)

Rješenje:
Koristit ćemo dekadni brojni sistem da izvršimo naznačeno računanje.
$333_{(5)} + 213_{(5)} = \left(3\cdot 5^2 + 3\cdot 5 + 3\right) + \left(2\cdot 5^2 + 1\cdot 5 + 3\right) = 93_{(10)} + 58_{(10)} = 151_{(10)}$. Dalje je
$151_{(10)} = 1\cdot 5^3 + 1\cdot 5^2 + 0\cdot 5 + 1 = 1101_{(5)}$.
Napomena, zadatak se može riješiti i direktnim računanjem u sistemu s bazom 5.