ŠIFRA KANDIDATA _ _ _ _ _

Zadatak 1. Cijena robe je snižena za 20%. Poskupljenje u procentima da bi se vratila prvobitna cijena robe mora iznositi:

a) 20% b) 25% c) 30% d) 50%

Rješenje: Pretpostavimo da je prvobitna cijena robe x. Nakon sniženja ta roba ima vrijednost
$x - 20\% \cdot x = x - \frac{20}{100} x = x - 0.2x = 0.8x$.
Potrebno je vratiti prvobitnu cijenu robe uz poskupljenje od $a(\%)$. Zbog toga je
$0.8x + a(\%) \cdot 0.8x = x,$

$0.8 + \frac{a}{100} 0.8 = 1,$
$a = 25.$
Tačan odgovor je b.

Zadatak 2. Ostatak pri dijeljenju polinoma $P(x) = 2x^5 + 2x^4 + x^2 - 12x + 1$ polinomom $Q(x) = x - 1$ je:

a) 2 b) -6 c) 16 d) 0

Rješenje: Po Bezuovom stavu ostatak pri dijeljenju polinoma $P(x)$ polinomom oblika $(x-a)$ je vrijednost $P(a)$. Primjenom tog stava zaključuje se da ostatak pri dijeljenju $P(x)$ sa $Q(x)$ iznosi
$P(1) = 2 \cdot (1)^5 + 2 \cdot (1)^4 + (1)^2 - 12 \cdot (1) + 1 = 2 + 2 + 1 - 12 + 1 = -6$.
Tačan odgovor je b.

Zadatak 3. Ako je $f^{-1}(x)=\dfrac{3x-2}{2x+3}$, onda je $f\left(\dfrac{1}{x}\right)$ jednako:

a) $\dfrac{2x+3}{3x-2}$ b) $\dfrac{2x-3}{3x+2}$ c) $\dfrac{3x+2}{3x-2}$ d) $\dfrac{3x-2}{2x-3}$

Rješenje: Iz $f^{-1}(x)=\dfrac{3x-2}{2x+3}=y$ (uz uslov da je $2x+3\neq 0$) slijedi da je $3x-2=2xy+3y$, odakle je $x=\dfrac{2+3y}{3-2y}=f(y)$, pa je $f\left(\dfrac{1}{x}\right)=\dfrac{2+\frac{3}{x}}{3-\frac{2}{x}}=\dfrac{2x+3}{3x-2}$ (uz uslov da je $x\neq 0, x\neq \dfrac{2}{3}$)

Tačan odgovor je a.

Zadatak 4. Proizvod rješenja jednačine $3|3x-1|=2-x+|6x-2|$ je:

a) $\dfrac{3}{8}$ b) $\dfrac{8}{3}$ c) $-\dfrac{3}{8}$ d) $-\dfrac{8}{3}$

Rješenje: Oblast rješavanja zadane jednačine je čitav skup realnih brojeva. S obzirom da je $|6x-2|=2|3x-1|$, to je zadana jednačina ekvivalentna sa $3|3x-1|=2-x+2|3x-1|$,

tj. sa $|3x-1|=2-x$.

Oblast rješavanja posljednje jednačine je $2-x\geq 0$, tj. $x\leq 2$. Posljednja jednačina je ekvivalentna sa $3x-1=2-x$, ili $3x-1=-(2-x)$ čija su rješenja redom $x=\dfrac{3}{4}$ ili $x=-\dfrac{1}{2}$, i oba zadovoljavaju oblast rješavanja posljednje jednačine, tj. uslov $x\leq 2$.

Proizvod rješenja jednačine je $-\dfrac{3}{8}$. Tačan odgovor je c.

Zadatak 5. Rješenje nejednačine $-\left|\sqrt{2-3x}+1\right| < x-3$ u skupu relanih brojeva dato je sa:

a) $x \in \left(-\infty, \frac{2}{3}\right] \cup [2, +\infty)$ b) $x \in \left(-\infty, \frac{2}{3}\right]$ c) $x \in R$ d) $x \in \varnothing$

Rješenje: Definiciono područje ove nejednačine određeno je sa $2-3x \geq 0 \Leftrightarrow x \in \left(-\infty, \frac{2}{3}\right]$.

Primijetimo da je $\sqrt{2-3x}+1 \geq 1$ za sve vrijednosti x iz definicionog područja nejednačine, pa je $\left|\sqrt{2-3x}+1\right| = \sqrt{2-3x}+1$. Sada se nejednačina svodi na

$-\left(\sqrt{2-3x}+1\right) < x-3 \Leftrightarrow \sqrt{2-3x}+1 > 3-x \Leftrightarrow \sqrt{2-3x} > 2-x$.

Primijetimo da je izraz sa desne strane nejednačine pozitivan za sve x iz definicionog područja, pa se nakon kvadriranja ove nejednačine i sređivanja dobije $x^2 - x + 2 < 0$. Diskriminanta parabole $x^2 - x + 2$ je negativna, a koeficijent uz x^2 pozitivan, pa ne postoji realan broj x koji ispunjava zadanu nejednačinu. Tačan odgovor je d.

Zadatak 6. Za rješenja x_1 i x_2 neke kvadratne jednačine $x^2 + bx + c = 0$ poznato je da vrijedi $x_1^3 + x_2^3 = 259$ i $x_1 + x_2 = 7$. Vrijednost proizvoda $x_1 x_2$ je:

a) 4 b) 6 c) 7 d) 14

Rješenje: Posmatrajmo kub izraza $x_1 + x_2$.

$$\left(x_1 + x_2\right)^3 = x_1^3 + 3x_1 x_2^2 + 3x_1^2 x_2 + x_2^3 = x_1^3 + x_2^3 + 3x_1 x_2 \left(x_1 + x_2\right)$$

Sada se transformacijom prethodnog izraza lako dobije:

$$x_1 x_2 = \frac{\left(x_1 + x_2\right)^3 - \left(x_1^3 + x_2^3\right)}{3\left(x_1 + x_2\right)}.$$

Uvrštavanjem $x_1 + x_2 = 7$ i $x_1^3 + x_2^3 = 259$ u prethodnu relaciju, dobije se $x_1 x_2 = 4$. Tačan odgovor je a.

Zadatak 7. Za kvadratnu funkciju f zadanu formulom $f(x)=ax^2+bx+c$ poznato je da vrijedi $f(-1)=5,\ f(0)=2,\ f(1)=3$. Vrijednost $f(-2)$ je:

a) 0 b) 5 c) -1/2 d) 12

Rješenje: Uvrštavanjem poznatih vrijednosti u opšti oblik kvadratne funkcije dobije se
$f(0)=c=2$
$f(-1)=a-b+c=5$
$f(1)=a+b+c=3,$
Što se (uvrštavanjem c iz prve jednačine) svede na sistem od dvije jednačine s dvije nepoznate: $a+b=1, a-b=3$. Odavde se sabiranjem posljednjih jednačina dobije $2a=4$, tj. $a=2$. Vraćanjem u jednu od jednačina posljednjeg sistema dobije se $b=-1$.Dakle, zadana kvadratna funkcija ima(analitički oblik $f(x)=2x^2-x+2$, odakle je $f(-2)=8+2+2=12$.
Tačan odgovor je d.

Zadatak 8. Rješenje eksponencijalne jednačine $25^{\sqrt{x}}-124\cdot 5^{\sqrt{x}}=125$ je:

a) $x=\frac{9}{4}$ b) $x=9$ c) $x=16$ d) $x=\frac{4}{9}$

Rješenje: Zadana jednačina je definirana na skupu $[0,+\infty)$ i ekvivalentna je s jednačinom $(5^{\sqrt{x}})^2-124\cdot 5^{\sqrt{x}}=125$, koja, nakon smjene $5^{\sqrt{x}}=t\ (>0)$, ima oblik $t^2-124t-125=0$. Posljednja (kvadratna) jednačina ima samo jedno pozitivno rješenje: t = 125. Otuda je $\sqrt{x}$ =3, tj. x= 9.
Tačan odgovor je b.

Zadatak 9. Skup svih rješenja nejednačine $\log_{x^2}(x^2-1) > \log_x 4$ (u skupu realnih brojeva) je skup:

a) $(1,2)$ b) $(\sqrt{5},+\infty)$ c) $(\sqrt{17},+\infty)$ d) $(-\infty,1]\cup(2,+\infty)$

Rješenje: (*Ograničit ćemo se na slučaj logaritma s pozitivnom bazom i različitom od* 1.)

Definiciono područje za zadanu nejednačinu je skup $\{x \in \mathbb{R}: x^2-1>0 \ \wedge\ x^2 \neq 0 \ \wedge\ x^2 \neq 1 \ \wedge\ x > 0\}$, tj. interval $(1,+\infty)$. Početna nejednačina se može transformisati u oblik:

$$\log_{x^2}(x^2-1) > \log_{x^2} 4^2.$$

S obzirom da je je baza posmatranog logaritma veća od 1 na domenu, slijedi: $x^2-1>16 \Longrightarrow |x| > \sqrt{17}$.
Iz presjeka skupa određenog posljednjom nejednakosti i definicionog područja slijedi da je skup svih rješenja zadane nejednačine interval $(\sqrt{17},+\infty)$.
Dakle, tačan odgovor je c.

Zadatak 10. Skup svih rješenja u skupu realnih brojeva trigonometrijske jednačine $4\cdot\sin x\cdot\sin(7x)=4\cdot\sin^2(4x)-1$ zadan je formulom:

a) $x=\pm\frac{\pi}{6}+\frac{2k\pi}{3}\ \ (k\in \mathrm{Z})$

c) $x=\pm\frac{\pi}{18}+\frac{k\pi}{3}\ \ (k\in \mathrm{Z})$

b) $x=\pm\frac{\pi}{18}+\frac{k\pi}{4}\ \ (k\in \mathrm{Z})$

d) $x=\pm\frac{\pi}{6}+\frac{k\pi}{4}\ \ (k\in \mathrm{Z})$

gdje je Z skup svih cijelih brojeva.

Rješenje: Vrijedi:

$$4\cdot\sin x\cdot\sin(7x)=4\cdot\sin^2(4x)-1 \Leftrightarrow 4\cdot\frac{\cos(6x)-\cos(8x)}{2}=4\cdot\frac{1-\cos(8x)}{2}-1\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2\cos(6x)-2\cos(8x)=1-2\cos(8x)\Leftrightarrow \cos(6x)=\frac{1}{2}\Leftrightarrow$$

$$6x=\frac{\pi}{3}+2k\pi\ \ (k\in \mathrm{Z})\vee 6x=-\frac{\pi}{3}+2k\pi(k\in Z)\Leftrightarrow x=\pm\frac{\pi}{18}+\frac{k\pi}{3}\ \ (k\in Z).$$

Dakle, tačan odgovor je c.

Zadatak 11. Skup svih rješenja nejednačine $(\mathrm{tg}x)^3+(\mathrm{tg}x)^2>1+\mathrm{tg}x$ na segmentu $[0,2\pi]$ je:

a) $x\in\left(0,\dfrac{\pi}{4}\right)$ b) $\left(\dfrac{5\pi}{4},\dfrac{3\pi}{2}\right)$ c) $\left(\dfrac{\pi}{4},\dfrac{\pi}{2}\right)\cup\left(\dfrac{5\pi}{4},\dfrac{3\pi}{2}\right)$ d) $\left(\dfrac{\pi}{4},\dfrac{\pi}{2}\right]\cup\left(\dfrac{5\pi}{4},\dfrac{3\pi}{2}\right]$.

Rješenje: Definiciono područje nejednačine je $x\in[0,2\pi]$, zbog uslova zadatka, za koje je $\cos\ x\neq 0$, tj. skup $\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right)\cup\left(\dfrac{\pi}{2},\dfrac{3\pi}{2}\right)\cup\left(\dfrac{3\pi}{2},2\pi\right]$.

Nejednačina $(\mathrm{tg}x)^3+(\mathrm{tg}x)^2>1+\mathrm{tg}x$ transformacijom postaje: $(\mathrm{tg}x)^2(\mathrm{tg}x+1)>\mathrm{tg}x+1$, odnosno $(\mathrm{tg}x+1)((\mathrm{tg}x)^2-1)>0$, odakle slijedi da je $(\mathrm{tg}x+1)^2(\mathrm{tg}x-1)>0$, odnosno $\mathrm{tg}x-1>0$, tj. $\mathrm{tg}x>1$. Otuda slijedi da su sva rješenja zadane nejednačine na segmentu $[0,2\pi]$ zadana sa $\dfrac{\pi}{4}+k\pi<x<\dfrac{\pi}{2}+k\pi$, $(k\in\mathbf{Z})$, tj. skup svih rješenja zadane nejednačine je $\left(\dfrac{\pi}{4},\dfrac{\pi}{2}\right)\cup\left(\dfrac{5\pi}{4},\dfrac{3\pi}{2}\right)$.

Tačan odgovor je c.

Zadatak 12. Zadana je jednačina $2x^2+2x+\cos(t)=0$ po nepoznatoj x. Vrijednost parametra t pod uslovom da za rješenja x_1 i x_2 zadane jednačine vrijedi $\dfrac{1}{x_1}+\dfrac{1}{x_2}=\dfrac{4}{\sqrt{3}}$ je:

a) $\begin{cases} t_1=\dfrac{3\pi}{6}+2k\pi, \\ t_2=\dfrac{5\pi}{6}+2k\pi. \end{cases}$ b) $\begin{cases} t_1=\dfrac{5\pi}{6}+2k\pi, \\ t_2=\dfrac{7\pi}{6}+2k\pi. \end{cases}$ c) $\begin{cases} t_1=\dfrac{4\pi}{6}+2k\pi, \\ t_2=\dfrac{\pi}{2}+2k\pi. \end{cases}$ d) $\begin{cases} t_1=\dfrac{\pi}{6}+2k\pi, \\ t_2=\dfrac{\pi}{3}+2k\pi. \end{cases}$

za sve cijele brojeve k.

Rješenje: Vrijedi: $x_1+x_2=-\dfrac{b}{a}=-1,\quad x_1\cdot x_2=\dfrac{c}{a}=\dfrac{\cos(t)}{2}$, odakle slijedi da je

$$\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}=\frac{4}{\sqrt{3}}\Leftrightarrow\frac{x_2+x_1}{x_1\cdot x_2}=\frac{4}{\sqrt{3}}\Leftrightarrow\frac{-2}{\cos(t)}=\frac{4}{\sqrt{3}}\Leftrightarrow\cos(t)=-\frac{\sqrt{3}}{2}\Rightarrow\begin{cases} t_1=\dfrac{5\pi}{6}+2k\pi, \\ t_2=\dfrac{7\pi}{6}+2k\pi. \end{cases}(k\in\mathrm{Z})\cdot$$

Tačan odgovor je b.

Zadatak 13. Površina kvadrata A je 10.5 cm^2. Površina kvadrata B, čija stranica je jednaka dijagonali kvadrata A iznosi:

a) 5.25 cm^2 b) 15cm^2 c) 25cm^2 d) 21cm^2

Rješenje: Ako je a stranica kvadrata A, onda je njegova površina je
$P_A = a^2 = 10.5\,\text{cm}^2$.

Ako se sa b označi stranica kvadrata B, njena dužina je

$$b = a\cdot\sqrt{2}.$$

Površina kvadrata B će biti

$$P_B = b^2 = \left(a\cdot\sqrt{2}\right)^2 = 2\cdot a^2 = 2\cdot P_A = 21\,\text{cm}^2.$$

Tačan odgovor je d.

Zadatak 14. Sve vrijednosti realnog parametra k za koje prava $p: y = kx + 2$ predstavlja tangentu kružnice $K: x^2 + y^2 = 1$ su:

a) 1 b) $\pm\frac{\sqrt{3}}{2}$ c) ± 2 d) $\pm\sqrt{3}$

Rješenje: Da bi prava bila tangenta kružnice potreban i dovoljan uslov jeste da sistem jednačina

$$x^2 + y^2 = 1$$
$$y = kx + 2$$

ima samo jedno rješenje.

Uvrštavajući drugu jednačinu u prvu, dobije se

$$x^2 + (kx+2)^2 = 1.$$

Posljednja jednačina se može svesti na oblik

$$x^2\left(1+k^2\right) + 4kx + 3 = 0.$$

Početni sistem jednačina će imati samo jedno rješenje, tj. prava p će biti tangenta kružnice K ako ova kvadratna jednačina ima samo jedno rješenje, dakle ako joj je diskriminanta jednaka nuli. Iz tog uslova dobije se

$$D = 16k^2 - 12\left(1+k^2\right) = 0 \Leftrightarrow 16k^2 - 12 - 12k^2 = 0,$$
$$k^2 = 3 \Rightarrow k = \pm\sqrt{3}$$

Tačan odgovor je d.

Zadatak 15. Površina četverougla čija tjemena leže u presječnim tačkama kružnice $x^2 + y^2 = 4$ i koordinatnih osa je:

a) P=8 kvadratnih jedinica

b) P=4 kvadratne jedinice

c) P=2 kvadratne jedinice

d) P=1 kvadratnu jedinicu

Rješenje: Centar kružnice je $C(0,0)$, a poluprečnik $r=2$. Za $y=0$ dobiju se presječne tačke kružnice sa apscisnom osom, odnosno $x^2+0=4 \Rightarrow x^2=4 \Rightarrow x=\pm 2$. Dakle dobiju se dva tjemena četverougla $A(-2,0)$ i $B(2,0)$. Za $x=0$ dobiju se presječne tačke kružnice sa ordinatnom osom, odnosno $0+y^2=4 \Rightarrow y^2=4 \Rightarrow y=\pm 2$, pa smo dobili i preostala dva tjemena četverougla $C(0,-2)$ i $D(0,2)$. Lahko se zaključuje da je traženi četverougao kvadrat. Stranica kvadrata se dobije iz jednakokrakog pravouglog trougla čije su katete jednake poluprečniku kružnice: $a^2=r^2+r^2 \Rightarrow a=\sqrt{2r^2}=\sqrt{2\cdot 4}=2\sqrt{2}$, a površina kvadrata je $P=a^2=\left(2\sqrt{2}\right)^2=8$ kvadratnih jedinica. Dakle, tačan odgovr je a.

Zadatak 16. Poluprečnik kružnice upisane u trougao čiji su vrhovi $A(3,2),\ B(2,-3),\ C(-2,5)$ je:

a) $\dfrac{20}{\sqrt{26}+2\sqrt{5}+\sqrt{34}}$ b) $\dfrac{28}{\sqrt{26}+4\sqrt{5}+\sqrt{34}}$ c) $\dfrac{30}{\sqrt{26}+4\sqrt{5}+\sqrt{34}}$ d) $\dfrac{20}{\sqrt{26}+\sqrt{5}+\sqrt{34}}$

Rješenje: Površina zadanog trougla je:

$$P=\frac{1}{2}\left|3(-3-5)+2(5-2)+(-2)(2+3)\right|=\frac{1}{2}\left|-28\right|=14 \text{ (kvadratnih jedinica).}$$

Da bismo izračunali poluprečnik zadane kružnice, trebamo najprije izračunati dužine stranica zadanog trougla. Imamo:

$$AB=\sqrt{(3-2)^2+(2+3)^2}=\sqrt{26},\ BC=\sqrt{(2+2)^2+(-3-5)^2}=\sqrt{80}=4\sqrt{5},$$
$$CA=\sqrt{(-2-3)^2+(5-2)^2}=\sqrt{34},$$

pa je obim trougla ΔABC zadan sa O $=\sqrt{26}+4\sqrt{5}+\sqrt{34}$.

Poluobim trougla $\Delta\ ABC$ je zadan sa $s=\dfrac{\sqrt{26}+4\sqrt{5}+\sqrt{34}}{2}$, pa za poluprečnik zadane kružnice vrijedi da je $r=\dfrac{P}{s}=\dfrac{14}{\dfrac{\sqrt{26}+4\sqrt{5}+\sqrt{34}}{2}}=\dfrac{28}{\sqrt{26}+4\sqrt{5}+\sqrt{34}}$. Tačan odgovor je b.

Zadatak 17. Površina trougla u kompleksnoj ravni, čiji vrhovi predstavljaju rješenja jednačine $z^3 = -8$ u skupu kompleksnih brojeva, je:

a) $2\sqrt{3}$ b) $\sqrt{3}$ c) $\frac{3\sqrt{3}}{2}$ d) $3\sqrt{3}$

Rješenje: Rješenja zadane jednačine u skupu kompleksnih brojeva su:

$$z_1 = 1 + i\sqrt{3}$$
$$z_2 = -2$$
$$z_3 = 1 - i\sqrt{3},$$

gdje je i imaginarna jedinica. Predstavljajući dobijena rješenja u kompleksnoj ravni, lako zaključujemo da je tražena površina trougla zadana sa $P = \frac{2\sqrt{3}\cdot 3}{2} = 3\sqrt{3}$. Prema tome, tačan odgovor je d.

Zadatak 18. Ako je zbir trećeg i petog člana aritmetičkog niza 22, a šesti član je 17, zbir drugog i četvrtog člana je:

a) 14 b) 12 c) 10 d) 16

Rješenje: Za *n*-ti član aritmetičkog niza vrijedi

$$a_n = a_1 + (n-1)\cdot d$$

gdje je a_1 prvi član niza, a d je diferencija niza.

Na osnovu uslova iz postavke zadatka je

$$a_3 + a_5 = a_1 + 2d + a_1 + 4d = 2a_1 + 6d = 22,$$
$$a_1 + 5d = 17.$$

Dakle, treba riješiti sistem linearnih jednačina

$$2a_1 + 6d = 22$$
$$a_1 + 5d = 17.$$

Njegovim rješavanjem se dobije da je $a_1 = 2$ i $d = 3$.

Zbir drugog i četvrtog člana je

$$a_2 + a_4 = a_1 + d + a_1 + 3d = 2a_1 + 4d = 16.$$

Tačan odgovor je d.

Zadatak 19. Parnih četverocifrenih brojeva kojima je zbir cifara jedinica i desetica 4 ima:

a) 1500 b) 243 c) 270 d) 450

Rješenje: Na prvoj mjestu se može pojaviti bilo koja cifra iz skupa $\{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$, na drugom mjestu se može pojaviti bilo koja cifra iz istog skupa uz dodatak cifre 0. Na posljednja dva mjesta se može pojaviti neki od skupova $\{0,4\}$, $\{2,2\}$, $\{4,0\}$ da bi bili zadovoljeni uslovi zadatka. Multiplikativnim principom se sada dobija da postoji $9 \cdot 10 \cdot 3 = 270$ takvih brojeva.
Tačan odgovor je c.

Zadatak 20. Oznaka $a_{(b)}$ je oznaka broja *a* zapisanog u brojnom sistemu s bazom *b*. Suma $444_{(6)} + 213_{(6)}$ jednaka je broju:

a) $1101_{(6)}$ b) $250_{(10)}$ c) $250_{(6)}$ d) $1101_{(2)}$

Rješenje: Data suma se može direktno odrediti u brojnom sistemu s bazom 6 i iznosi $1101_{(6)}$.
Zadatak se može riješiti i prebacivanjem u brojni sistem s bazom 10, sabiranjem i provjeravanjem tog rezultata u brojnim sistemima baza 2 i 6 (zbog ponuđenih odgovora).
$444_{(6)} + 213_{(6)} = \left(4 \cdot 6^2 + 4 \cdot 6 + 4\right) + \left(2 \cdot 6^2 + 1 \cdot 6 + 3\right) = 253_{(10)}$
Prebacivanjem posljednjeg broja u brojni sistem baze 6 dobiva se isti rezultat kao i direktnim sabiranjem. Tačan odgovor je a.