<u>Zadatak 1 (grupa A)</u>

Odrediti sve vrijednosti parametra $a \in R$ tako da samo jedno od rješenja (ne oba rješenja) jednačine: $x^2 + |a|x - 2|1-a| = 0$ pripada intervalu (0, 1).

<u>Rješenje zadatka 1</u>

Uslovi da jedno od rješenja kvadratne jednačine pripada intervalu (α, β) su: $D > 0$ (1) i $f(\alpha) \cdot f(\beta) < 0$ (2). Uvrštavanjem numeričkih vrijednosti uslovi (1) i (2) postaju :

$$a^2 + 8|1-a| > 0 \text{ (1) i } -2|1-a| \cdot \left(1 + |a| - 2|1-a|\right) < 0 \text{ (2).}$$

Nejednačina (1) je tačna $\forall a \in R$ jer je $a^2 \geq 0$ i $|1-a| \geq 0$, a $a^2 + 8|1-a|$ nikada ne može biti jednaka 0, $\forall a \in R$.

Rješenje nejednačine (2):

$$-2|1-a| \cdot \left(1 + |a| - 2|1-a|\right) < 0 \text{ (2)}$$

Kako je $-2|1-a| < 0, \forall a \in R / \{1\}$ nejednačina se svodi na $1 + |a| - 2|1-a| > 0$.

$-\infty$	0	1	$+\infty$
$\|a\|$	-	+	+
$\|1-a\|$	+	+	-

Na osnovu tabele se može zapaziti da se nejednačina (2) rastavlja na tri moguća slučaja.

(2a) $a \in (-\infty, 0)$

$1 - a - 2(1-a) > 0 \Rightarrow a > 1$ (2a'), pa je rješenje za (2a), (2a) $\cap$(2a'), $a \in \{\varnothing\}$ (*)

(2b) $a \in [0, 1)$

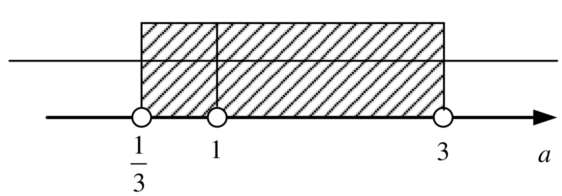
$1 + a - 2(1-a) > 0 \Rightarrow a > \frac{1}{3}$ (2b'), pa je rješenje za (2b), (2b) $\cap$(2b'), $a \in \left(\frac{1}{3}, 1\right)$ (**)

(2c) $a \in (1, +\infty)$ (a=1 se isključuje, jer nejednačina (2) nema tada rješenja)

$1 + a + 2(1-a) > 0 \Rightarrow a < 3$ (2c'), pa je rješenje za (2c), (2c) $\cap$(2c'), $a \in (1, 3)$ (***)

Konačno rješenje nejednačine (2) je (*)$\cup$(**)$\cup$(***), $a \in \left(\frac{1}{3}, 1\right) \cup (1, 3)$ (2)

Uslov da je jedno rješenje jednačine $x^2 + |a|x - 2|1-a| = 0$ u intervalu $(0, 1)$ se dobije presjekom rješenja (1) i (2), odakle je $a \in \left(\frac{1}{3}, 1\right) \cup (1, 3)$.



Slika 1A: Grafički prikaz rješenja

Zadatak 1 (grupa B)

Odrediti sve vrijednosti parametra $a \in R$ tako da samo jedno od rješenja (ne oba rješenja) jednačine: $x^2 + |b|x - 2|b-1| = 0$ pripada intervalu (0, 1).

Rješenje zadatka 1:

Uslovi da jedno od rješenja kvadratne jednačine pripada intervalu (α, β) su: $D > 0$ (1) i $f(\alpha) \cdot f(\beta) < 0$ (2). Uvrštavanjem numeričkih vrijednosti uslovi (1) i (2) postaju:

$$b^2 + 8|b-1| > 0 \text{ (1) i } -2|b-1| \cdot \left(1 + |b| - 2|b-1|\right) < 0 \text{ (2).}$$

Nejednačina (1) je tačna $\forall b \in R$ jer je $b^2 \geq 0$ i $|b-1| \geq 0$, a $b^2 + 8|b-1|$ nikada ne može biti jednaka 0, $\forall b \in R$.

Rješenje nejednačine (2):

$$-2|b-1| \cdot \left(1 + |b| - 2|b-1|\right) < 0 \text{ (2)}$$

Kako je $-2|b-1| < 0, \forall a \in R / \{1\}$ nejednačina se svodi na $1 + |b| - 2|b-1| > 0$.

	$-\infty$ 0	0 1	1 $+\infty$
$\lvert b \rvert$	-	+	+
$\lvert b-1 \rvert$	-	-	+

Na osnovu tabele se može zapaziti da se nejednačina (2) rastavlja na tri moguća slučaja.

(2a) $b \in (-\infty, 0)$

$1 - b + 2(b-1) > 0 \Rightarrow b > 1$ (2a'), pa je rješenje za (2a), (2a) $\cap$(2a'), $b \in \{\varnothing\}$ (*)

(2b) $b \in [0, 1)$

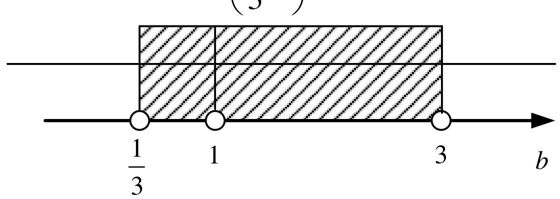
$1 + b + 2(b-1) > 0 \Rightarrow b > \frac{1}{3}$ (2b'), pa je rješenje za (2b), (2b) $\cap$(2b'), $b \in \left(\frac{1}{3}, 1\right)$ (**)

(2c) $b \in (1, +\infty)$ (b=1 se isključuje, jer nejednačina (2) nema tada rješenja)

$1 + b - 2(b-1) > 0 \Rightarrow b < 3$ (2c'), pa je rješenje za (2c), (2c) $\cap$(2c'), $b \in (1, 3)$ (***)

Konačno rješenje nejednačine (2) je (*)$\cup$(**)$\cup$(***), $b \in \left(\frac{1}{3}, 1\right) \cup (1, 3)$ (2)

Uslov da je jedno rješenje jednačine $x^2 + |b|x - 2|b-1| = 0$ u intervalu $(0, 1)$ se dobije presjekom rješenja (1) i (2), odakle je $b \in \left(\frac{1}{3}, 1\right) \cup (1, 3)$.



Slika 1B: Grafički prikaz rješenja

Zadatak 2 (grupa A)

U skupu realnih brojeva *R* riješiti jednačinu: $\sin(2t) = 2(\cos^2 t - \cos t) + 2\sin^2 t + \sin t - 1$.

Rješenje zadatka 2

$\sin(2t)$ rastavimo kao $\sin(2t) = 2 \cdot \sin t \cdot \cos t$ i prebacimo na desnu stranu, tako da nam početna jednačina postaje:

$$0 = -2 \cdot \sin t \cdot \cos t + 2 \cdot (\cos^2 t - \cos t) + 2 \cdot \sin^2 t + \sin t - 1$$

$$0 = -2 \cdot \sin t \cdot \cos t + 2 \cdot \cos^2 t - 2 \cdot \cos t + 2 \cdot \sin^2 t + \sin t - 1$$

$$0 = \left(\sin t - 2 \cdot \sin t \cdot \cos t\right) + \left(2 \cdot \left(\sin^2 t + \cos^2 t\right) - 2 \cdot \cos t - 1\right)$$

$$0 = \left(\sin t - 2 \cdot \sin t \cdot \cos t\right) + \left(2 - 2 \cdot \cos t - 1\right)$$

$$0 = \sin t \cdot \left(1 - 2 \cdot \cos t\right) + \left(1 - 2 \cdot \cos t\right)$$

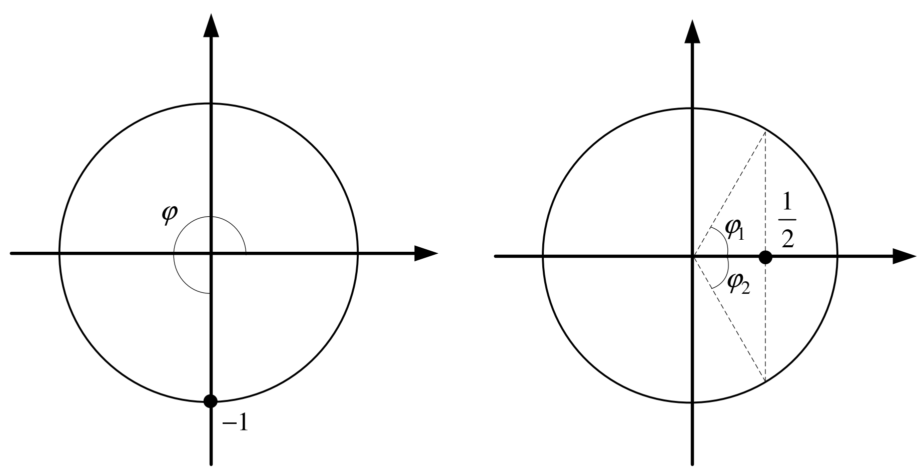
$$0 = \left(1 + \sin t\right) \cdot \left(1 - 2 \cdot \cos t\right)$$

Prvo rješenje se dobije iz:

$$0 = \left(1 + \sin t\right) \quad \Rightarrow \quad \sin t = -1 \quad \Rightarrow \quad t_1 = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi, k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

Drugo i treće rješenje se dobiju iz:

$$0 = \left(1 - 2 \cdot \cos t\right) \quad \Rightarrow \quad \cos t = \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} t_2 = \dfrac{\pi}{3} + 2m\pi, m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots \\ t_3 = 2\pi - \dfrac{\pi}{3} + 2n\pi = \dfrac{5\pi}{3} + 2n\pi, n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots \end{cases}$$



Slika 2A: Grafički prikaz rješenja jednačine

Zadatak 2 (grupa B)
U skupu realnih brojeva *R* riješiti jednačinu: $\sin(2t) = \cos t(\cos t - 2) + \sin^2 t + \sin t$.

Rješenje zadatka 2
$\sin(2t)$ rastavimo kao $\sin(2t) = 2\cdot\sin t\cdot\cos t$ i prebacimo na desnu stranu, tako da nam početna jednačina postaje:

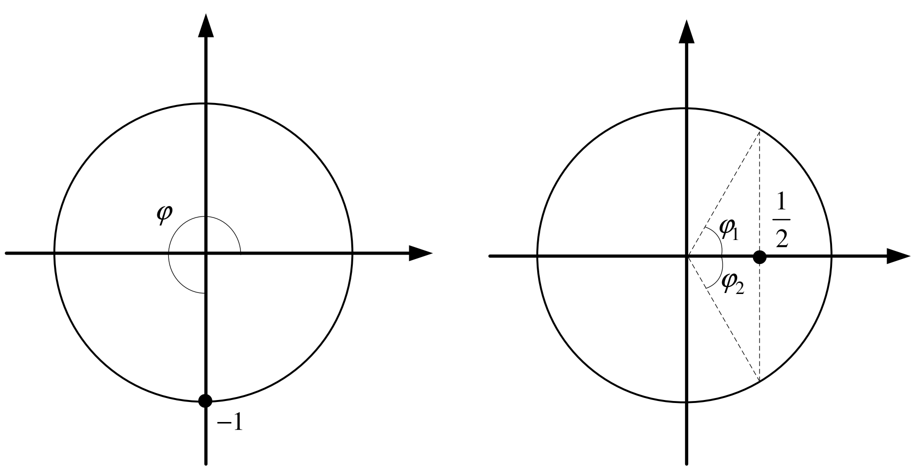
$$0 = -2\cdot\sin t\cdot\cos t + \cos t(\cos t - 2) + \sin^2 t + \sin t$$
$$0 = -2\cdot\sin t\cdot\cos t + \cos^2 t - 2\cdot\cos t + \sin^2 t + \sin t$$
$$0 = \left(\sin t - 2\cdot\sin t\cdot\cos t\right) + \left(\left(\sin^2 t + \cos^2 t\right) - 2\cdot\cos t\right)$$
$$0 = \left(\sin t - 2\cdot\sin t\cdot\cos t\right) + \left(1 - 2\cdot\cos t\right)$$
$$0 = \sin t\cdot\left(1 - 2\cdot\cos t\right) + \left(1 - 2\cdot\cos t\right)$$
$$0 = \left(1 + \sin t\right)\cdot\left(1 - 2\cdot\cos t\right)$$

Prvo rješenje se dobije iz:

$$0 = \left(1 + \sin t\right) \quad => \quad \sin t = -1 \quad => \quad t_1 = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi, k = 0, \pm1, \pm2, ...$$

Drugo i treće rješenje se dobiju iz:

$$0 = \left(1 - 2\cdot\cos t\right) \quad => \quad \cos t = \frac{1}{2} \quad => \quad \begin{cases} t_2 = \dfrac{\pi}{3} + 2m\pi, m = 0, \pm1, \pm2, ... \\ t_3 = 2\pi - \dfrac{\pi}{3} + 2n\pi = \dfrac{5\pi}{3} + 2n\pi, n = 0, \pm1, \pm2, ... \end{cases}$$



Slika 2B: Grafički prikaz rješenja jednačine

Zadatak 3 (grupa A)

Predstaviti u eksponencijalnom i trigonometrijskom obliku kompleksne brojeve: $z_1 = -3 - 4i$ i $z_2 = 12 + 5i$, a nakon toga izračunati kompleksne brojeve: $z_3 = z_1 z_2$ i $z_4 = z_1 + z_2$.

Rješenje zadatka 3

Svaki kompleksni broj $z = x + i \cdot y$ se može napisati u eksponencijalnom i trigonometrijskom obliku kao: $z = \rho \cdot e^{i \cdot \varphi} = \rho \cdot (\cos\varphi + i \cdot \sin\varphi)$, gdje je moduo dat kao: $|z| = \rho = \sqrt{x^2 + y^2}$, a

argument (ugao) kao: $\varphi = \begin{cases} arctg\left(\dfrac{y}{x}\right), za\ x > 0\ i\ y > 0 \\ \pi - arctg\left(\dfrac{y}{|x|}\right), za\ x < 0\ i\ y > 0 \\ \pi + arctg\left(\dfrac{y}{x}\right), za\ x < 0\ i\ y < 0 \\ 2\pi - arctg\left(\dfrac{|y|}{x}\right), za\ x > 0\ i\ y < 0 \end{cases}$.

$$z_1 = -3 - 4i = \rho_1 \cdot e^{i \cdot \varphi_1} = \rho_1 \cdot (\cos\varphi_1 + i \cdot \sin\varphi_1)$$

$$\rho_1 = \sqrt{(-3)^2 + (-4)^2} = 5$$

$$\varphi_1 = \pi + arctg\left(\frac{-4}{-3}\right) \approx 4,068\, rad \approx 233,13^0$$

$$z_1 = -3 - 4i \approx 5 \cdot e^{i \cdot 233,13^0} \approx 5 \cdot (\cos 233,13^0 + i \cdot \sin 233,13^0)$$

$$z_2 = 12 + 5i = \rho_2 \cdot e^{i \cdot \varphi_2} = \rho_2 \cdot (\cos\varphi_2 + i \cdot \sin\varphi_2)$$

$$\rho_2 = \sqrt{(12)^2 + (5)^2} = 13$$

$$\varphi_2 = arctg\left(\frac{5}{12}\right) \approx 0,349\, rad \approx 22,62^0$$

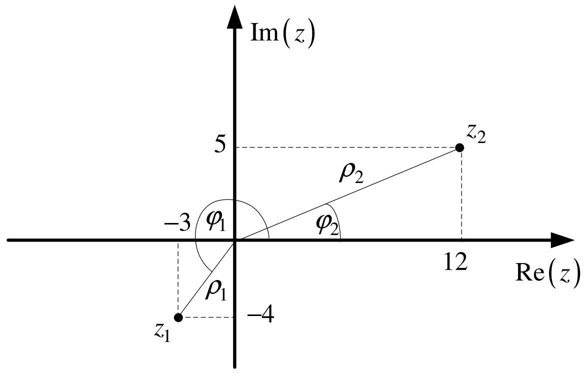
$$z_2 = 12 + 5i \approx 13 \cdot e^{i \cdot 22,62^0} \approx 13 \cdot (\cos 22,62^0 + i \cdot \sin 22,62^0)$$

$$z_3 = z_1 \cdot z_2 = (-3 - 4i) \cdot (12 + 5i) = -3 \cdot 12 - 3 \cdot 5i - 4i \cdot 12 - 4i \cdot 5i = -16 - 63i$$

ili

$$z_3 = z_1 \cdot z_2 = \left(\rho_1 \cdot e^{i \cdot \varphi_1}\right) \cdot \left(\rho_2 \cdot e^{i \cdot \varphi_2}\right) = (\rho_1 \cdot \rho_2) \cdot e^{i \cdot (\varphi_1 + \varphi_2)} \approx 65 \cdot e^{i \cdot 255,75^0}$$

$$z_4 = z_1 + z_2 = (-3 - 4i) + (12 + 5i) = (-3 + 12) + (-4i + 5i) = 9 + i$$



Slika 3A: Prikaz položaja kompleksnih brojeva

Zadatak 3 (grupa B)

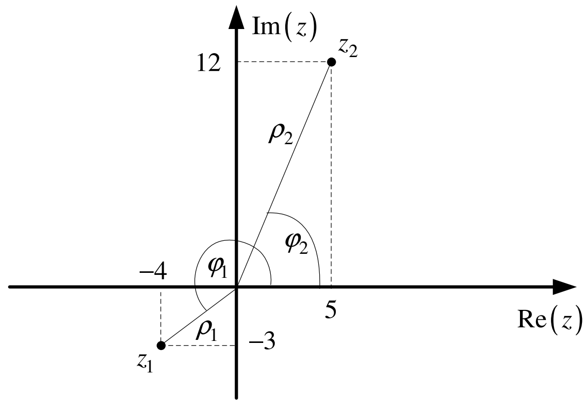
Predstaviti u eksponencijalnom i trigonometrijskom obliku kompleksne brojeve: $z_1 = -4-3i$ i $z_2 = 5+12i$, a nakon toga izračunati kompleksne brojeve: $z_3 = z_1 z_2$ i $z_4 = z_1 + z_2$.

Rješenje zadatka 3

Svaki kompleksni broj $z = x + i \cdot y$ se može napisati u eksponencijalnom i trigonometrijskom obliku kao: $z = \rho \cdot e^{i\cdot\varphi} = \rho \cdot (\cos\varphi + i \cdot \sin\varphi)$, gdje je moduo dat kao: $|z| = \rho = \sqrt{x^2+y^2}$, a argument (ugao) kao:
$$\varphi = \begin{cases} arctg\left(\dfrac{y}{x}\right), za\ x>0\ i\ y>0 \\ \pi - arctg\left(\dfrac{y}{|x|}\right), za\ x<0\ i\ y>0 \\ \pi + arctg\left(\dfrac{y}{x}\right), za\ x<0\ i\ y<0 \\ 2\pi - arctg\left(\dfrac{|y|}{x}\right), za\ x>0\ i\ y<0 \end{cases}.$$

$$z_1 = -4-3i = \rho_1 \cdot e^{i\cdot\varphi_1} = \rho_1 \cdot (\cos\varphi_1 + i \cdot \sin\varphi_1)$$
$$\rho_1 = \sqrt{(-4)^2 + (-3)^2} = 5$$
$$\varphi_1 = \pi + arctg\left(\frac{-3}{-4}\right) \approx 3,785\, rad \approx 216,87^0$$
$$z_1 = -4-3i \approx 5 \cdot e^{i\cdot 216,87^0} \approx 5 \cdot (\cos 216,87^0 + i \cdot \sin 216,87^0)$$
$$z_2 = 5+12i = \rho_2 \cdot e^{i\cdot\varphi_2} = \rho_2 \cdot (\cos\varphi_2 + i \cdot \sin\varphi_2)$$
$$\rho_2 = \sqrt{(5)^2 + (12)^2} = 13$$
$$\varphi_2 = arctg\left(\frac{12}{5}\right) \approx 1,176\, rad \approx 67,38^0$$
$$z_2 = 5+12i \approx 13 \cdot e^{i\cdot 67,38^0} \approx 13 \cdot (\cos 67,38^0 + i \cdot \sin 67,38^0)$$

$$z_3 = z_1 \cdot z_2 = (-4-3i)\cdot(5+12i) = -4\cdot 5 - 4\cdot 12i - 3i\cdot 5 - 3i \cdot 12i = 16-63i$$
ili
$$z_3 = z_1 \cdot z_2 = \left(\rho_1 \cdot e^{i\cdot\varphi_1}\right)\cdot\left(\rho_2 \cdot e^{i\cdot\varphi_2}\right) = \left(\rho_1 \cdot \rho_2\right)\cdot e^{i\cdot(\varphi_1+\varphi_2)} \approx 65 \cdot e^{i\cdot 284,25^0}$$
$$z_4 = z_1 + z_2 = (-4-3i)+(5+12i) = (-4+5)+(-3i+12i) = 1+9i$$



Slika 3B: Prikaz položaja kompleksnih brojeva

Zadatak 4 (grupa A)

U skupu realnih brojeva R riješiti nejednačinu: $\dfrac{\sqrt{5-\sqrt{1-x}}}{\sqrt{2-x}}<1$.

Rješenje zadatka 4

Prvo određujemo definiciono područje (DP):

1. $2-x>0 \quad => \quad 2>x \qquad (1)$

2. $1-x\geq 0 \quad => \quad 1\geq x \qquad (2)$

3. $$\begin{aligned}&5-\sqrt{1-x}\geq 0\\ &5\geq \sqrt{1-x}\;/^2 \qquad (3)\\ &25\geq 1-x \quad => \quad x\geq -24\end{aligned}$$

DP određujemo kao presijek (1), (2) i (3), tj. DP je dat sa:

$$x\in[-24,1].$$

Pošto smo odredili DP, možemo preći na rješavanje zadane iracionalne nejednačine:

$$\frac{\sqrt{5-\sqrt{1-x}}}{\sqrt{2-x}}<1 \quad <=> \quad \sqrt{5-\sqrt{1-x}}<\sqrt{2-x}$$

(možemo množiti dijegonalno jer su brojnik i nazivnik pozitivni, te pri tome nema promjene znaka nejednakosti).

Posljednju relaciju možemo kvadrirati jer su na obje strane nejednačine pozitivne veličine:

$$\begin{aligned}&\sqrt{5-\sqrt{1-x}}<\sqrt{2-x}\;/^2\\ &5-\sqrt{1-x}<2-x\\ &3+x<\sqrt{1-x}\end{aligned}$$

odnosno:

$$3+x<\sqrt{1-x} \quad (4)$$

Zadnju relaciju moramo tretirati posebno za slučajeve $3+x<0$ i $3+x\geq 0$.

1^0 Za $3+x<0 \quad => \quad x<-3$

U ovom slučaju, kada analiziramo (4), vrijedi da je lijeva strana negativna, a desna strana pozitivna veličina. Ovo je očigledno ispunjeno za svako x sa DP, koje ispunjava $x<-3$. Pa je prvo rješenje:

$$\begin{aligned}&x\in[-24,1]\cap(-\infty,-3)\\ &x\in[-24,-3]\end{aligned} \quad \text{(R1)}.$$

2^0 Za $3+x \geq 0 \quad => \quad x \geq -3$

U ovom slučaju, kada analiziramo (4), su obje strane pozitivne veličine, pa (4) možemo kvadrirati:

$$3+x < \sqrt{1-x} \; /^2$$
$$x^2+6\cdot x+9 < 1-x$$
$$x^2+7\cdot x+8 < 0$$

Rješenje posljednje relacije se nalazi na: $x \in (x_1, x_2)$, gdje su $x_{1/2}$ rješenja jednačine: $x^2+7\cdot x+8=0$, pa su:

$$x_{1/2} = \frac{-7 \pm \sqrt{7^2-4\cdot 1\cdot 8}}{2} = \frac{-7 \pm \sqrt{17}}{2}, \text{ tj. } \begin{cases} x_1 = \dfrac{-7-\sqrt{17}}{2} \\ x_2 = \dfrac{-7+\sqrt{17}}{2} \end{cases}.$$

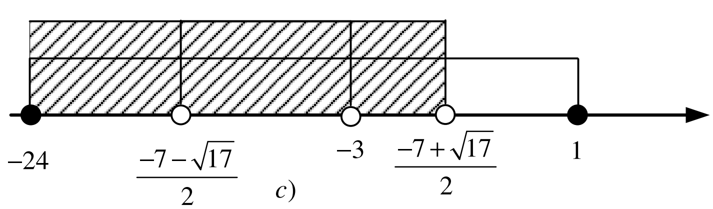
Dakle, rješenje nejednačine $x^2+7\cdot x+8<0$ je $x \in \left(\frac{-7-\sqrt{17}}{2}, \frac{-7+\sqrt{17}}{2}\right)$.

Ovo rješenje, u presjeku sa DP, daje drugo rješenje početne nejednačine:

$$x \in [-24, 1] \cap \left(\frac{-7-\sqrt{17}}{2}, \frac{-7+\sqrt{17}}{2}\right)$$
$$x \in \left(\frac{-7-\sqrt{17}}{2}, \frac{-7+\sqrt{17}}{2}\right) \quad \text{(R2).}$$

Konačno rješenje tražimo kao (R1) i (R2):

$$x \in [-24, -3] \cup \left(\frac{-7-\sqrt{17}}{2}, \frac{-7+\sqrt{17}}{2}\right)$$
$$x \in \left[-24, \frac{-7+\sqrt{17}}{2}\right)$$



Slika 4A: Grafički prikaz rješenja

Zadatak 4 (grupa B)

U skupu realnih brojeva R riješiti nejednačinu: $\frac{\sqrt{5-\sqrt{1-x}}}{\sqrt{2-x}}>1$.

Rješenje zadatka 4

Prvo određujemo definiciono područje (DP):

1. $2-x>0 \quad => \quad 2>x \qquad (1)$

2. $1-x\geq 0 \quad => \quad 1\geq x \qquad (2)$

3.
$$5-\sqrt{1-x}\geq 0$$
$$5\geq \sqrt{1-x} \,/^2 \qquad (3)$$
$$25\geq 1-x \quad => \quad x\geq -24$$

DP određujemo kao presijek (1), (2) i (3), tj. DP je dat sa:

$$x\in[-24,1].$$

Pošto smo odredili DP, možemo preći na rješavanje zadane iracionalne nejednačine:

$$\frac{\sqrt{5-\sqrt{1-x}}}{\sqrt{2-x}}>1 \quad <=> \quad \sqrt{5-\sqrt{1-x}}>\sqrt{2-x}$$

(možemo množiti dijegonalno jer su brojnik i nazivnik pozitivni, te pri tome nema promjene znaka nejednakosti).

Posljednju relaciju možemo kvadrirati jer su na obje strane nejednačine pozitivne veličine:

$$\sqrt{5-\sqrt{1-x}}>\sqrt{2-x} \,/^2$$
$$5-\sqrt{1-x}>2-x$$
$$3+x>\sqrt{1-x}$$

Zadnju relaciju ima smisla rješavati samo ukoliko je $3+x>0 \quad => \quad x>-3 \quad (4)$.

$$3+x>\sqrt{1-x} \,/^2$$
$$9+6\cdot x+x^2>1-x$$
$$x^2+7\cdot x+8>0$$

Rješenje posljednje relacije se nalazi na: $x\in(-\infty,x_1)\cup(x_2,+\infty)$, gdje su $x_{1/2}$ rješenja jednačine: $x^2+7\cdot x+8=0$, pa su:

$$x_{1/2}=\frac{-7\pm\sqrt{7^2-4\cdot 1\cdot 8}}{2}=\frac{-7\pm\sqrt{17}}{2}, \text{ tj. } \begin{cases} x_1=\frac{-7-\sqrt{17}}{2} \\ x_2=\frac{-7+\sqrt{17}}{2} \end{cases}.$$

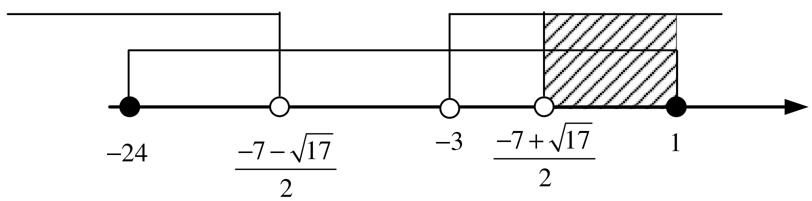
Dakle, rješenje nejednačine $x^2+7\cdot x+8>0$ je

$$x\in\left(-\infty,\frac{-7-\sqrt{17}}{2}\right)\cup\left(\frac{-7+\sqrt{17}}{2},+\infty\right) \quad (5).$$

Konačno rješenje tražimo kao presjek DP-a, (4) i (5):

$$x \in [-24,1] \cap (-3,+\infty) \cap \left(\left(-\infty, \frac{-7-\sqrt{17}}{2} \right) \cup \left(\frac{-7+\sqrt{17}}{2}, +\infty \right) \right)$$

$$x \in \left(\frac{-7+\sqrt{17}}{2}, 1 \right)$$



Slika 4B: Grafički prikaz rješenja

Zadatak 5 (grupa A)

Odrediti jednačinu kružnice K čiji je radijus r=5, tangente su joj koordinatne ose i smještena je u trećem kvadrantu. Nakon toga odrediti rastojanje centra kružnice od prave p koja prolazi kroz tačku $P(3,7)$ a na koordinatnim osama odsijeca odsječke jednakih dužina.

Rješenje zadatka 5

Jednačina kružnice K je: $(x-p)^2+(y-q)^2=r^2$. Obzirom da su koordinatne ose tangente kružnice, te iz činjenice da je kružnica smještena u trećem kvadrantu, vrijedi da je:

$$-p=-q=r \quad => \quad p=q=-5.$$

Na osnovu ovoga, jednačina kružnice K je:

$$(x+5)^2+(y+5)^2=5^2=25.$$

Odredimo sada pravu p. Obzirom da na koordinatnim osama prava p odsijeca odsječke jednakih dužina, to iz segmentnog oblika prave: $\frac{x}{m}+\frac{y}{n}=1$, vrijedi da je $|m|=|n|$, tj. $m=n$ i $m=-n$. Očigledno imamo dva rješenja za pravu p i to $p1$ i $p2$. Kako prave $p1$ i $p2$ sadrže tačku $P(3,7)$, za pravu $p1$ možemo pisati da je:

$$\frac{x}{m}+\frac{y}{m}=1$$

$$\frac{3}{m}+\frac{7}{m}=1$$

$$\frac{10}{m}=1 \quad => \quad m=10$$

, a za pravu $p2$ možemo pisati da je:

$$\frac{x}{m}-\frac{y}{m}=1$$

$$\frac{3}{m}-\frac{7}{m}=1$$

$$\frac{-4}{m}=1 \quad => \quad m=-4$$

Na osnovu ovoga, prava $p1$ je data sa:

$$x+y-10=0,$$

a prava $p2$ je data sa:

$$x-y+4=0.$$

Udaljenost prave $A\cdot x+B\cdot y+C=0$ od centra kružnice $(x-p)^2+(y-q)^2=r^2$ je data sa:

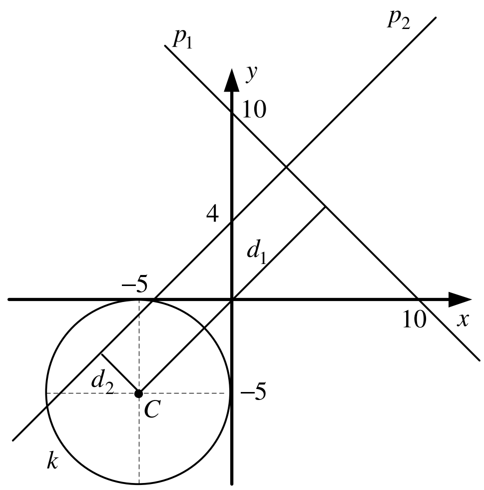
$$d=\frac{|A\cdot p+B\cdot q+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}$$

Uvrštavajući izračunate podatke za kružnicu K i pravu $p1$, dobijemo:

$$d_1=\frac{|1\cdot(-5)+1\cdot(-5)-10|}{\sqrt{1^2+1^2}}=\frac{|-20|}{\sqrt{2}}=\frac{20}{\sqrt{2}}=10\cdot\sqrt{2}$$

Uvrštavajući izračunate podatke za kružnicu K i pravu $p2$, dobijemo:

$$d_2 = \frac{\left|1 \cdot (-5) - 1 \cdot (-5) + 4\right|}{\sqrt{1^2 + 1^2}} = \frac{|4|}{\sqrt{2}} = \frac{4}{\sqrt{2}} = 2 \cdot \sqrt{2}$$



Slika 5A: Prikaz kružnice i prave

Zadatak 5 (grupa B)
Odrediti jednačinu kružnice K čiji je radijus r=5, tangente su joj koordinatne ose i smještena je u četvrtom kvadrantu. Nakon toga odrediti rastojanje centra kružnice od prave p koja prolazi kroz tačku P(-3,7) a na koordinatnim osama odsijeca odsječke jednakih dužina.

Rješenje zadatka 5
Jednačina kružnice K je: $(x-p)^2+(y-q)^2=r^2$. Obzirom da su koordinatne ose tangente kružnice, te iz činjenice da je kružnica smještena u četvrtom kvadrantu, vrijedi da je:

$$p=-q=r \quad => \quad p=-q=5\,.$$

Na osnovu ovoga, jednačina kružnice K je:

$$(x-5)^2+(y+5)^2=5^2=25\,.$$

Odredimo sada pravu p. Obzirom da na koordinatnim osama prava p odsijeca odsječke jednakih dužina, to iz segmentnog oblika prave: $\frac{x}{m}+\frac{y}{n}=1$, vrijedi da je $|m|=|n|$, tj. $m=n$ i $m=-n$. Očigledno imamo dva rješenja za pravu p i to *p1* i *p2*. Kako prave *p1* i *p2* sadrže tačku *P(-3,7)*, za pravu *p1* možemo pisati da je:

$$\frac{x}{m}+\frac{y}{m}=1$$

$$\frac{-3}{m}+\frac{7}{m}=1$$

$$\frac{4}{m}=1 \quad => \quad m=4$$

, a za pravu *p2* možemo pisati da je:

$$\frac{x}{m}-\frac{y}{m}=1$$

$$\frac{-3}{m}-\frac{7}{m}=1$$

$$\frac{-10}{m}=1 \quad => \quad m=-10$$

Na osnovu ovoga, prava *p1* je data sa:

$$x+y-4=0\,,$$

a prava *p2* je data sa:

$$x-y+10=0\,.$$

Udaljenost prave $A\cdot x+B\cdot y+C=0$ od centra kružnice $(x-p)^2+(y-q)^2=r^2$ je data sa:

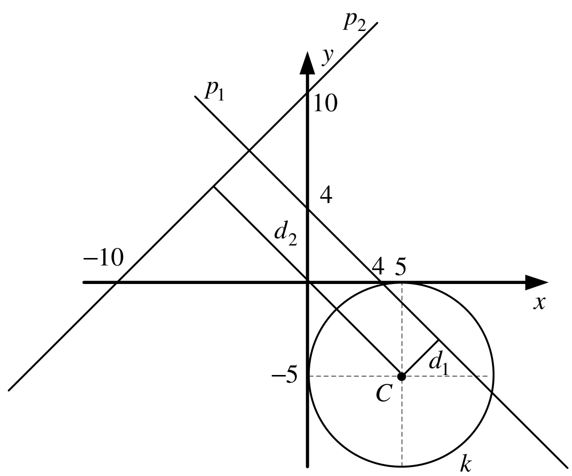
$$d=\frac{|A\cdot p+B\cdot q+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}$$

Uvrštavajući izračunate podatke za kružnicu K i pravu *p1*, dobijemo:

$$d_1=\frac{|1\cdot 5+1\cdot(-5)-4|}{\sqrt{1^2+1^2}}=\frac{|-4|}{\sqrt{2}}=\frac{4}{\sqrt{2}}=2\cdot\sqrt{2}$$

Uvrštavajući izračunate podatke za kružnicu *K* i pravu *p2*, dobijemo:

$$d_2 = \frac{|1 \cdot 5 - 1 \cdot (-5) + 10|}{\sqrt{1^2 + 1^2}} = \frac{|20|}{\sqrt{2}} = \frac{20}{\sqrt{2}} = 10 \cdot \sqrt{2}$$



Slika 5B: Prikaz kružnice i prave