Rješenja zadataka sa prijemnog ispita na Elektrotehničkom fakultetu Univerziteta u Sarajevu (2. VII 2007) – grupa A

Zadatak 1. **a)** Nacrtati grafik funkcije f zadane formulom $f(x) = x^2 - 5x + 4$. Nakon toga riješiti svaku od nejednadžbi:

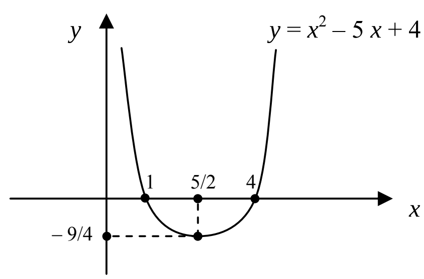
$$x^2 - 5x + 4 < 0, \quad x^2 - 5x + 4 \le 0, \quad x^2 - 5x + 4 > 0, \quad x^2 - 5x + 4 \ge 0.$$

b) Odrediti sve vrijednosti realnog parametra k tako da jednadžba $kx^2 - 2(k+2)x + 2k + 1 = 0$ ima dva realna i različita rješenja koja pripadaju intervalu (0,5).

Rješenje:

a) $f(x) = x^2 - 5x + 4.,\quad x_{1,2} = \dfrac{5 \pm \sqrt{25-16}}{2};\quad x_1 = 1,\ x_2 = 4.$

Tjeme $T(x_T, y_T)$: $\quad x_T = -\dfrac{b}{2a} = \dfrac{5}{2},\quad y_T = \dfrac{4ac - b^2}{4a} = y(x_T) = -\dfrac{9}{4},$ tj. $T\left(\dfrac{5}{2}, -\dfrac{9}{4}\right)$.



Slika 1.

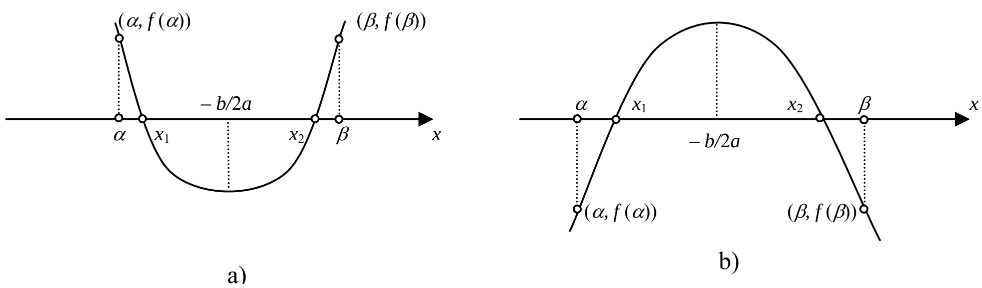
Sa slike 1 neposredno slijedi da je

$$x^2 - 5x + 4 < 0 \iff 1 < x < 4 \quad (\text{tj. } \forall x \in (1, 4));$$
$$x^2 - 5x + 4 \le 0 \iff x \in [1, 4];$$
$$x^2 - 5x + 4 > 0 \iff x \in (-\infty, 1) \cup (4, +\infty);$$
$$x^2 - 5x + 4 \ge 0 \iff x \in (-\infty, 1] \cup [4, +\infty).$$

b) Da oba rješenja $x1, x2$, kvadratne jednačine $ax^2 + bx + c = 0$, $(a \neq, 0)$, budu u intervalu (α, β), $(\alpha < \beta)$, potrebno je i dovoljno da su ispunjeni uslovi:

$$(*)\quad \begin{cases} D = b^2 - 4ac \geq 0, \\ a\ f(\alpha) > 0 \quad \wedge \quad a\ f(\beta) > 0, \\ \alpha < -\dfrac{b}{2a} < \beta, \end{cases}$$

gdje je $f(x) = ax^2 + bx + c$ (v. sl. 2).



Sl. 2. a), b)

U našem slučaju je $\alpha = 0$, $\beta = 5$, $a = k$, $b = -2(k+2)$, $c = 2k + 1$, pa imamo:

$f(0) = 2k + 1,$
$f(5) = 25k - 10(k+2) + 2k + 1 = 17k - 19,$
$D = b^2 - 4ac = 4(k+2)^2 - 4k(2k+1) = -4(k+1)(k-4).$

Uslovi (*) su sada ekvivalentni sljedećoj relaciji:

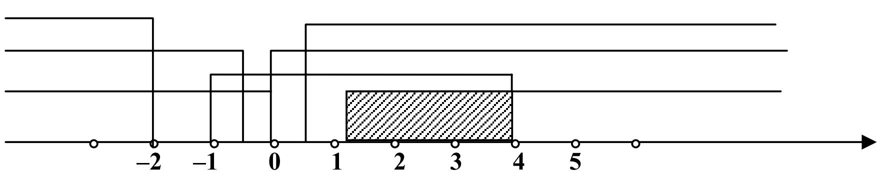
$$(k+1)(k-4) \leq 0 \quad \wedge \quad k(2k+1) > 0 \quad \wedge \quad k(17k - 19) > 0 \quad \wedge \quad 0 < \frac{k+2}{k} < 5,$$

odakle je

$$-1 \leq k \leq 4 \quad \wedge \quad (k > 0 \quad \vee \quad k < -\frac{1}{2}) \quad \wedge \quad (k > \frac{19}{17} \quad \vee \quad k < 0) \quad \wedge \quad (k > \frac{1}{2} \quad \vee \quad k < -2\ ),$$

pa je (v. sl. 3)

$$k \in \left[\frac{19}{17},\ 4\right).$$



Zadatak 2. Riješiti sistem jednadžbi: $\begin{cases} \log_2(x^2+y^2)+1=\log_2 130 \\ \log_{10}(x-y)-\log_{10}(x+y)=\log_{10} 2. \end{cases}$

Rješenje:

$D_f = \{(x^2+y^2 \neq 0) \wedge (x-y>0) \wedge (x+y>0)\}.$

$$\log_2(x^2+y^2)=\log_2 130-\log_2 2=\log_2\frac{130}{2}=\log_2 65$$

$$x^2+y^2=65 \qquad (1)$$

$$\log_{10}\frac{x-y}{x+y}=\log_{10}2, \quad \frac{x-y}{x+y}=2, \quad y=-\frac{1}{3}x$$

$$y=-\frac{1}{3}x \qquad (2)$$

$$x^2+\frac{1}{9}x^2=65 \;\Rightarrow\; x^2=\frac{9\cdot 65}{10} \;\Rightarrow\; x_{1,2}=\pm 3\sqrt{\frac{13}{2}}$$

$$x_1=3\sqrt{\frac{13}{2}}, \quad y_1=-\sqrt{\frac{13}{2}}$$

$$x_1-y_1=3\sqrt{\frac{13}{2}}+\sqrt{\frac{13}{2}}=4\sqrt{\frac{13}{2}} \quad >0$$

$$x_1+y_1=3\sqrt{\frac{13}{2}}-\sqrt{\frac{13}{2}}=2\sqrt{\frac{13}{2}} \quad >0$$

$$x_2=-3\sqrt{\frac{13}{2}}, \quad y_2=\sqrt{\frac{13}{2}}$$

$$x_2-y_2=-3\sqrt{\frac{13}{2}}-\sqrt{\frac{13}{2}} \quad <0$$

$$x_2+y_2=-3\sqrt{\frac{13}{2}}+\sqrt{\frac{13}{2}} \quad <0$$

(x_2, y_2) ne dolazi u obzir zbog D_f.

Rješenje je $(x_1, y_1)=\left(3\sqrt{\frac{13}{2}},\ -\sqrt{\frac{13}{2}}\right).$

Zadatak 3. Odrediti sve kompleksne brojeve z koji zadovoljavaju uslove:

$$\left|\frac{z-12}{8i-z}\right| = \frac{5}{3}, \quad \left|\frac{4-z}{z-8}\right| = 1, \quad \text{gdje je } i \text{ imaginarna jedinica.}$$

Rješenje:

Stavljajući $z = x + i\,y$ $(x, y \in \mathbf{R})$ i kvadriranjem zadanih jednakosti, dobijemo

$$9\,|\,x + i\,y - 12\,|^2 = 25\,|\,8i - x - y\,i\,|^2, \qquad |\,4 - x - y\,i\,|^2 = |\,x + i\,y - 8|^2,$$

odnosno,

$$9\,[(x-12)^2 + y^2] = 25\,[x^2 + (8-y)^2], \qquad (4-x)^2 + y^2 = (x-8)^2 + y^2. \qquad (*)$$

Iz druge jednadžbe sistem (*) slijedi $x^2 - 8x + 16 = x^2 - 16x + 64$, odnosno $8x = 48$, tj. $x = 6$, pa zamjenom u prvu jednadžbu sistema (*), dobijemo jednadžbu $y^2 - 25\,y + 136 = 0$, čija su rješenja $y_1 = 8$ i $y_2 = 17$.

Dakle, traženi kompleksni brojevi su $z_1 = 6 + 8\,i$, $z_2 = 6 + 17\,i$.

Zadatak 4. Izračunati sve vrijednosti izraza $\dfrac{\sin\alpha + \cos\beta}{\operatorname{tg}\alpha}$ ako je $\alpha + \beta = \pi$ i $\sin\alpha = \dfrac{3}{5}$.

Rješenje:

Na osnovu $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1 \Rightarrow \cos\alpha = \pm\sqrt{1-\sin^2\alpha} = \pm\sqrt{1-\dfrac{9}{25}} = \pm\dfrac{4}{5}$.

$\sin\alpha = 0{,}6$ za $\alpha = \alpha_1$ ili za $\alpha_2 = \pi - \alpha_1$.

Pri $\sin\alpha_1 = 0{,}6$, $\alpha_1 \in \left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$, $\beta_1 = \pi - \alpha_1$

$\operatorname{tg}\alpha_1 = \dfrac{\sin\alpha_1}{\cos\alpha_1} = \dfrac{3}{4} = 0{,}75,$, $\cos\beta_1 = \cos(\pi - \alpha_1) = \cos\pi\,\cos\alpha_1 + \sin\pi\,\sin\alpha_1 = -\dfrac{4}{5}$

$\dfrac{0{,}6 - 0{,}8}{0{,}75} = \dfrac{-0{,}2}{0{,}75} = -\dfrac{4}{15}$.

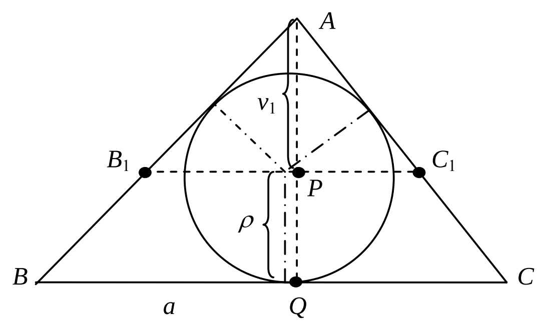
Pri $\sin\alpha_2 = 0{,}6$, $\alpha_2 \in \left(\dfrac{\pi}{2}, \pi\right)$, $\beta_2 = \pi - \alpha_2$, $\beta_2 \in \left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$

$\operatorname{tg}\alpha_2 = \dfrac{0{,}6}{-0{,}8} = -\dfrac{3}{4}$, $\cos\beta_2 = 0{,}8$

$\dfrac{0{,}6 + 0{,}8}{-0{,}75} = \dfrac{1{,}4}{-0{,}75} = -\dfrac{\frac{14}{10}}{\frac{3}{4}} = -\dfrac{56}{30} = -\dfrac{28}{15}$.

Zadatak 5. U trokut čije stranice imaju dužine 24 cm, 12 cm i 18 cm upisana je kružnica. Kroz centar te kružnice povučena je prava paralelna s najdužom stranicom. Izračunati obim novonastalog trokuta.

Rješenje:



Primjenom Heronove formule za površinu trokuta ABC (čije su dužine stranica a, b, c)

$$P = \sqrt{s\,(s-a)\,(s-b)\,(s-c)}\,,$$

gdje je $s = \dfrac{a+b+c}{2}$, dobijemo da je $P = 27\sqrt{15}$ cm^2. Zatim iz formule za površinu trokuta $P = \rho \cdot s$, gdje je ρ radijus upisane kružnice u trokut, nadjemo da je $\rho = \sqrt{15}$ cm.

Koristeći formulu za površinu trougla $P = \dfrac{a \cdot v_a}{2}$ imamo da je dužina visine v_a na najdužu stranicu a: $v_a (= d\,(A, Q)) = \dfrac{9\sqrt{15}}{4}$ cm. Visinu v_1 novonastalog trokuta AB_1C_1 dobit ćemo kao razliku:

$$v_1 = d(A, Q) - d\,(P, Q) = \frac{5\sqrt{15}}{4} \text{ cm.}$$

Kako su trokuti ABC i AB_1C_1 slični, a izračunate su im odgovarajuće visine, koeficijent k sličnosti odredit ćemo iz omjera dužina tih visina:

$$k = 5 : 9.$$

Budući da se obimi sličnih likova odnose u omjeru koji je jednak koeficijentu sličnosti dobijemo da je obim novonastalog trokuta jednak

$$\frac{5}{9}\,(24+12+18) = 30 \text{ cm.}$$