Rješenja zadataka sa prijemnog ispita
na Elektrotehničkom fakultetu Univerziteta u Sarajevu (2. VII 2007) – grupa B

Zadatak 1. a) Nacrtati grafik funkcije f zadane formulom $f(x) = x^2 - 4x + 3$. Nakon toga riješiti svaku od nejednadžbi:

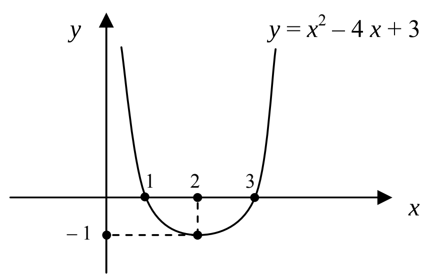
$$x^2 - 4x + 3 < 0, \quad x^2 - 4x + 3 \le 0, \quad x^2 - 4x + 3 > 0, \quad x^2 - 4x + 3 \ge 0.$$

b) Odrediti sve vrijednosti realnog parametra k tako da jednadžba $kx^2 + (k-1)x + k + 1 = 0$ ima dva realna i različita rješenja od kojih tačno jedno pripada intervalu (0, 1).

Rješenje:

a) $f(x) = x^2 - 4x + 3, \quad x_{1,2} = \dfrac{4 \pm \sqrt{16-12}}{2}; \quad x_1 = 1, \quad x_2 = 3.$

Tjeme $T(x_T, y_T)$: $\quad x_T = -\dfrac{b}{2a} = \dfrac{4}{2} = 2, \quad y_T = \dfrac{4ac - b^2}{4a} = y\,(x_T) = 3 - 4 = -1$, tj. $T(2, -1)$.



Slika 1.

Sa slike 1 neposredno slijedi da je

$$x^2 - 4x + 3 < 0 \iff 1 < x < 3 \quad (\text{tj. } \forall x \in (1, 3));$$
$$x^2 - 4x + 3 \le 0 \iff x \in [1, 3];$$
$$x^2 - 4x + 3 > 0 \iff x \in (-\infty, 1) \cup (3, +\infty);$$
$$x^2 - 4x + 3 \ge 0 \iff x \in (-\infty, 1] \cup [3, +\infty).$$

b) Neka su α i β realni brojevi i $\alpha < \beta$. Da bismo mogli procjenjivati položaj nula kvadratne funkcije f zadane formulom

$$f(x) = ax^2 + bx + c,$$

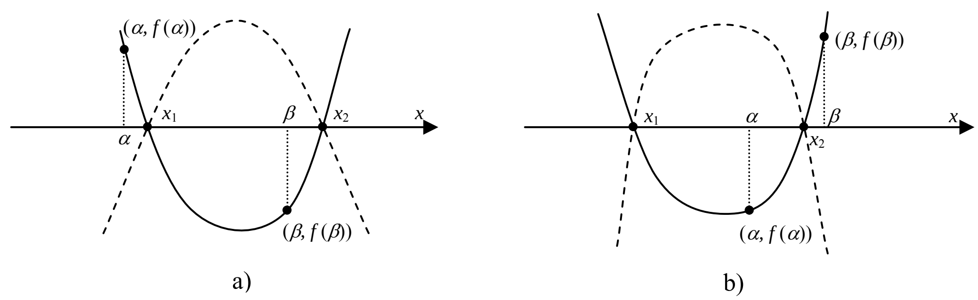
odnosno rješenja kvadratne jednačine $ax^2 + bx + c = 0$, prema intervalu (α, β), potrebno je da diskriminanta bude nenegativna, jer, u protivnom, ne možemo upoređivati imaginarne nule funkcije sa realnim brojevima α, β.

Da bi jedna i samo jedna nula bila u intervalu (α, β), potrebno je i dovoljno da je

$$f(\alpha) \cdot f(\beta) < 0 \quad \text{(v. sl. 2).} \tag{*}$$

Imamo, dakle, ekvivalenciju:

$$(\alpha < x_1 < \beta < x_2) \vee (x_1 < \alpha < x_2 < \beta) \Leftrightarrow f(\alpha) \cdot f(\beta) < 0.$$



Sl. 2. a), b)

Primijetimo da uslov $f(\alpha) \cdot f(\beta) < 0$ povlači uslov $D > 0$, pa ga ne treba posebno navoditi.

U našem slučaju imamo jednadžbu

$$kx^2 + (k-1)x + k + 1 = 0,$$

a interval (α, β) je $(0, 1)$; $\alpha = 0$, $\beta = 1$, pa je

$$f(\alpha) = f(0) = k + 1, \quad f(\beta) = f(1) = k + (k-1) + k + 1 = 3k.$$

Otuda je uslov (*) ekvivalentan sa

$$(k+1) \cdot 3k < 0. \tag{**}$$

Rješenja nejednadžbe (**) su zadana sa

$$(k + 1 < 0 \quad \wedge \quad k > 0) \cup (k + 1 > 0 \quad \wedge \quad k < 0),$$

odakle slijedi da je rješenje nejednadžbe (**)

$$\forall k \in (-1, 0).$$

Zadatak 2. Riješiti sistem jednadžbi: $\begin{cases} \log_{10}(x^2+y^2)+1=\log_{10}130 \\ \log_2(x-y)-\log_2(x+y)=4\log_2 2. \end{cases}$

Rješenje:

$D_f = \{(x^2+y^2 \neq 0) \wedge (x-y>0) \wedge (x+y>0)\}.$

$$\log_{10}(x^2+y^2)=\log_{10}130-\log_{10}10=\log_{10}\frac{130}{10}=\log_{10}13$$
$$x^2+y^2=13 \qquad (1)$$

$$\log_2\frac{x-y}{x+y}=\log_2 16,\quad \frac{x-y}{x+y}=16,\quad y=-\frac{15}{17}x$$
$$y=-\frac{15}{17}x \qquad (2)$$

$$x^2+\frac{225}{289}x^2=13 \;\Rightarrow\; \frac{289+225}{289}x^2=13 \;\Rightarrow\; x_{1,2}=\pm\sqrt{\frac{13\cdot 289}{514}}$$
$$x_1=\sqrt{\frac{13\cdot 289}{514}}=17\sqrt{\frac{13}{514}},\quad y_1=-15\sqrt{\frac{13}{514}}$$
$$x_2=-17\sqrt{\frac{13}{514}},\quad y_2=15\sqrt{\frac{13}{514}}$$
(x_2, y_2) ne dolazi u obzir zbog D_f.

Rješenje je $(x_1, y_1)=\left(17\sqrt{\frac{13}{514}},\; -15\sqrt{\frac{13}{514}}\right).$

Zadatak 3. Odrediti sve kompleksne brojeve z koji zadovoljavaju uslove:

$$\left|\frac{z-8i}{z-12}\right| = \frac{3}{5}, \quad \left|\frac{z-8}{z-4}\right| = 1,$$ gdje je i imaginarna jedinica.

Rješenje:

Stavljajući $z = x + i\,y$ $(x, y \in \mathbf{R})$ i kvadriranjem zadanih jednakosti, dobijemo

$$9\,|\,x + i\,y - 12\,|^2 = 25\,|\,x + i\,y - 8i\,|^2, \qquad |x + i\,y - 4|^2 = |\,x + i\,y - 8|^2,$$

odnosno,

$$9\,[(x-12)^2 + y^2] = 25\,[x^2 + (y-8)^2], \qquad (x-4)^2 + y^2 = (x-8)^2 + y^2. \qquad (*)$$

Iz druge jednadžbe sistem (*) slijedi $x^2 - 8x + 16 = x^2 - 16x + 64$, odnosno $8x = 48$, tj. $x = 6$, pa zamjenom u prvu jednadžbu sistema (*), dobijemo jednadžbu $y^2 - 25\,y + 136 = 0$, čija su rješenja $y_1 = 8$ i $y_2 = 17$.

Dakle, traženi kompleksni brojevi su $z_1 = 6 + 8\,i$, $z_2 = 6 + 17\,i$.

Zadatak 4. Izračunati sve vrijednosti izraza $\dfrac{\operatorname{tg}\alpha}{\sin\alpha+\cos\beta}$ ako je $\alpha+\beta=\pi$ i $\cos\alpha=\dfrac{3}{5}$.

Rješenje:

Na osnovu $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1 \Rightarrow \sin\alpha=\pm\sqrt{1-\cos^2\alpha}=\pm\sqrt{1-\dfrac{9}{25}}=\pm\dfrac{4}{5}$.

$\cos\alpha=0{,}6$ za $\alpha=\alpha_1$ ili za $\alpha_2=-\alpha_1$, $\alpha_1\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$

Pri $\cos\alpha_1=0{,}6$, $\sin\alpha_1=0{,}8$, $\beta_1=\pi-\alpha_1$

$\operatorname{tg}\alpha_1=\dfrac{0{,}8}{0{,}6}=\dfrac{4}{3}$, $\cos\beta_1=\cos\pi\cos\alpha_1+\sin\pi\sin\alpha_1=-0{,}6$

$$\frac{\frac{4}{3}}{0{,}8-0{,}6}=\frac{\frac{4}{3}}{\frac{2}{10}}=\frac{40}{6}=\frac{20}{3}.$$

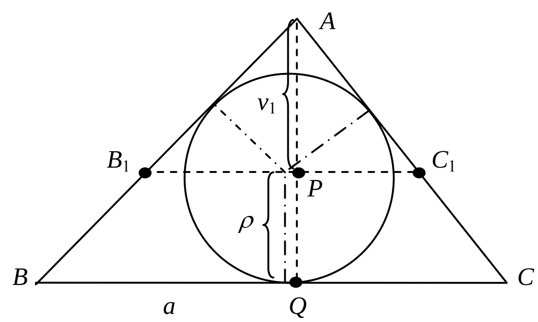
Pri $\cos\alpha_2=0{,}6$, $\sin\alpha_2=-0{,}8$, $\beta_2=\pi-\alpha_2$

$\operatorname{tg}\alpha_2=\dfrac{-0{,}8}{0{,}6}=-\dfrac{4}{3}$, $\cos\beta_2=\cos\pi\cos\alpha_2+\sin\pi\sin\alpha_2=-0{,}6$

$$\frac{-\frac{4}{3}}{-0{,}8-0{,}6}=\frac{-\frac{4}{3}}{-1{,}4}=\frac{\frac{4}{3}}{\frac{14}{10}}=\frac{40}{42}=\frac{20}{21}.$$

Zadatak 5. U trokut čije stranice imaju dužine 24 cm, 12 cm i 18 cm upisana je kružnica. Kroz centar te kružnice povučena je prava paralelna s najdužom stranicom. Izračunati površinu novonastalog trokuta.

Rješenje:



Primjenom Heronove formule za površinu trokuta ABC (čije su dužine stranica a, b, c)

$$P = \sqrt{s\ (s-a)\ (s-b)\ (s-c)}\,,$$

gdje je $s = \dfrac{a+b+c}{2}$, dobijemo da je $P = 27\sqrt{15}$ cm^2. Zatim iz formule za površinu trokuta $P = \rho \cdot s$, gdje je ρ radijus upisane kružnice u trokut, nadjemo da je $\rho = \sqrt{15}$ cm.

Koristeći formulu za površinu trougla $P = \dfrac{a \cdot v_a}{2}$ imamo da je dužina visine v_a na najdužu stranicu a: $v_a (= d\ (A, Q)) = \dfrac{9\sqrt{15}}{4}$ cm. Visinu v_1 novonastalog trokuta AB_1C_1 dobit ćemo kao razliku:

$$v_1 = d(A, Q) - d\ (P, Q) = \frac{5\sqrt{15}}{4} \text{ cm}.$$

Kako su trokuti ABC i AB_1C_1 slični, a izračunate su im odgovarajuće visine, koeficijent k sličnosti odredit ćemo iz omjera dužina tih visina:

$$k = 5 : 9.$$

Budući da se površine sličnih likova odnose u omjeru koji je jednak kvadratu koeficijenta sličnosti dobijemo da je površna novonastalog trokuta jednaka

$$\left(\frac{5}{9}\right)^2 \cdot P_{ABC} = \frac{25}{81} \cdot 27\sqrt{15} = \frac{25}{3}\sqrt{15} \text{ cm}^2.$$