

# OBRAZLOŽENJE PRIJEDLOGA TEME DOKTORSKE DISERTACIJE

## 1. Kandidat i prijedlog naslova disertacije

**Kandidat:** mr sci. Delić (Šaban) Sead, dipl. el. ing.

**Oblast studija:** Računarstvo i informatika.

Nakon konsultacija sa **vanr. prof. dr sci. Željko Jurić, dipl. el. ing.**, predložen je sljedeći radni naslov teme doktorske disertacije:

Bosanski:

**“NEKOLIKO POBOLJŠANJA RAČUNARSKIH ALGORITAMA ZA NUMERIČKO RJEŠAVANJE KLASIČNIH PROBLEMA LINEARNE ALGEBRE”**

Engleski:

**“SEVERAL IMPROVEMENTS OF COMPUTER ALGORITHMS FOR NUMERICAL SOLVING OF TYPICAL PROBLEMS OF LINEAR ALGEBRA”**

## 2. Obrazloženje prijedloga doktorske disertacije

Stacionarno stanje ma kakvog linearnog dinamičkog sistema određuje se rješavanjem sistema linearnih algebarskih jednačina. Primjeri takvih sistema u elektrotehnici su linearna električna kola, u mašinstvu i građevinarstvu problemi statike, a u ekonomiji novčani i robni tokovi, razni mikro i makroekonomski modeli i drugo. Sastavljanje ovih jednačina zasniva se na temeljnim fizikalnim zakonima kao što su u elektrotehnici Ohm-ov i Kirchhoff-ovi zakoni. Za određivanje tog stacionarnog stanja potrebno je riješiti sistem linearnih algebarskih jednačina koje opisuju to stanje po fizikalnim veličinama, koje su rješenje tog stacionarnog stanja. Broj jednačina koje definišu stacionarno stanje određen je stepenom slobode datog sistema. Tako je sistem koji ima  $n$  stepeni slobode opisan sa  $n$  jednačina. Te jednačine imaju oblik:

$$\begin{aligned} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \cdots + a_{1,n}x_n &= b_1 \\ &\vdots \\ a_{n,1}x_1 + a_{n,2}x_2 + \cdots + a_{n,n}x_n &= b_n \end{aligned}$$

ili u matričnom obliku:

$$A \cdot x = b,$$

gdje je sa  $A$  označena matrica sistema:

$$A = \begin{bmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & & \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,n} \end{bmatrix},$$

sa  $x$  vektor kolona nepoznatih veličina:

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix},$$

a sa  $b$  vektor slobodnih članova:

$$b = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}.$$

Sistem ima jedinstveno rješenje ako je determinanta sistema različita od nule, a u suprotnom sistem može imati beskonačno mnogo rješenja ili biti protivrječan. U slučaju kad ima beskonačno mnogo rješenja, tipično se zahtijeva pronalaženje onog rješenja koje zadovoljava i neke dopunske kriterije, poput maksimiziranja neke linearne forme, što je recimo slučaj u problemima linearne optimizacije.

**U principu, svako rješavanje sistema linearnih algebarskih jednačina sa više od nekoliko nepoznatih bez upotrebe računara je besmisleno, a za sisteme sa više desetina, stotina pa čak i hiljada nepoznatih praktično i nemoguće.**

Dosta čest slučaj koji se javlja u sistemima linearnih algebarskih jednačina je da su elementi  $i$ -tog reda jednaki elementima  $i$ -te kolone,  $a_{i,j} = a_{j,i}$  ( $i, j = 1, \dots, n$ ), i takve kvadratne matrice za koje vrijedi  $A = A^T$  nazivamo simetričnim matricama. Recimo, u nekim metodama za rješavanje problema u kojima se javljaju linearni sistemi, kao što su metoda konturnih struja i metoda napona čvorova u elektrotehnici za mreže koje ne sadrže kontrolisane naponske ili strujne generatore, matrica sistema je uvijek simetrična matrica, a što ukazuje na potrebu nalaženja efikasnih metoda za rad sa simetričnim matricama. Isto tako, u mnogim praktičnim primjenama matrica sistema je dijagonalno pojasna matrica, koja je uz to često i simetrična. Nažalost, veliki broj metoda za rješavanje sistema linearnih jednačina ne koristi na zadovoljavajući način prednosti koje se mogu izvući iz eventualne simetrije sistema. Postoje doduše neke metode koje su namjenski razvijene za simetrične sisteme, ali većina takvih metoda ili posjeduju ozbiljna ograničenja, ili su nepotrebno komplikovane.

Rješavanje sistema linearnih algebarskih jednačina je vjerovatno najčešće susretani numerički problem u matematici i tehničkim naukama, pa je stoga svako poboljšanje u ovoj oblasti od izuzetnog značaja. Na rješavanje sistema linearnih algebarskih jednačina oslanjaju se i mnoge druge numeričke metode kao što su: računanje determinante, računanje ranga matrice, računanje inverzne matrice, rješavanje sistema nelinearnih jednačina, interpolacija funkcije, numeričko rješavanje diferencijalnih jednačina i druge.

Načini rješavanja sistema linearnih algebarskih jednačina na računaru suštinski se dijele u dvije grupe:

- a) Direktne metode;
- b) Iteracione metode.

Algoritmi zasnovani na direktnim metodama se dijele na tri grupe:

- a) Algoritmi koje se zasnivaju na računanju determinante;
- b) Algoritmi koje se koriste trouglastim matricama;
- c) Algoritmi zasnovani na rekurzivnoj dekompoziciji.

#### **a) Algoritmi koje se zasnivaju na računanju determinante**

Algoritmi koje se zasnivaju na računanju determinante oslanjaju se na primjenu Cramer-ovog pravila. Ovdje se prije svega misli na računanje determinante pomoću permutacija. Dosta bolji i praktičniji način računanja determinante je Laplace-ov razvoj. Iako navedeni algoritmi daju uopšteni način računanja determinante  $n$ -tog reda, nedostatak ovih algoritama je enormno velik broj računanja, reda  $n!$ , a kod programske realizacije Laplace-ovog razvoja javlja se i enormno velik broj premještanja elemenata matrice. Kao takve pokazuju se korisnim za sisteme sa malim brojem jednačina (recimo, do pet, dok je praktična granica primjenljivosti ograničena do najviše desetak jednačina). Mada su ove metode više značajne za teoretska razmatranja, nego za praktične numeričke algoritme, postoje izvjesne situacije u kojima ove metode mogu biti interesantne. Ključna činjenica je da se ove metode za računanje determinante ne oslanjaju na operaciju dijeljenja. Stoga one mogu poslužiti za računanje veoma loše uslovljenih determinanti sa cjelobrojnim koeficijentima, odnosno pripadnih sistema, kod kojih mala greška usljed zaokruživanja (pri operaciji dijeljenja) može drastično uticati na konačan rezultat. Pored toga, ove metode omogućavaju računanje determinanti u nekim algebarskim strukturama izvan polja realnih ili kompleksnih brojeva u kojima operacija dijeljenja uopšte nije ni definisana, što može biti od interesa. Međutim, treba naglasiti da u raspoloživoj literaturi do sada nije pokazano kako bi ijedan algoritam bazirani na ovim metodama mogao iskoristiti eventualnu simetriju matrice koja se razmatra.

#### **b) Algoritmi koje se koriste trouglastim matricama**

Algoritmi koji se koriste trouglastim matricama su po brzini neuporedivo bolji od predhodnih, ali zahtijevaju da algebarska struktura nad kojom se izvode poznaje operaciju dijeljenja. Broj računskih operacija i premještanja elemenata kod ovih algoritama je drastično manji od broja računskih operacija kod algoritama iz prethodne skupine, i tipično je približno proporcionalan sa  $n^3$ , gdje je  $n$  broj jednačina. Ovdje se prije svega misli na Carl Friedrich Gauss-ov algoritam svodenja matrice na ekvivalentnu trouglastu matricu. Drugi značajan algoritam ove grupe je LU faktORIZACIJA, koja postoji u nekoliko srodnih varijanti (metoda Cholesky-og odnosno Crout-a, metoda Doolittle-a). Ponekad se LU faktORIZACIJA naziva LU dekompozicija, a u računarstvo ju je uveo 1948. godine Engleski matematičar Alan Turing.

Niti za Gauss-ov algoritam eliminacije, niti za LU faktORIZACIJE nisu nađeni adekvatni načini koje iskorištavaju eventualnu simetriju matrice. Jedina grupa algoritama koji su adekvatno znanstveno zaokruženi za slučaj simetričnih matrica su algoritmi zasnovane na LDU faktORIZACIJI koja za slučaj simetričnih matrica ima oblik  $LDL^T$ . Međutim, ova faktORIZACIJA ne postoji za sve simetrične matrice (recimo,  $LDL^T$  faktORIZACIJA ne postoji za matricu koja ima nulu u gornjem lijevom uglu). Uz adekvatno pivotiranje, situacija se može donekle popraviti, ali ne uvijek. U radovima Bunch-a ovaj problem je riješen dopuštanjem da D ne bude čisto dijagonalna matrica, nego da može imati  $2 \times 2$  blokove na dijagonali, pri čemu takvi blokovi preuzimaju i ulogu

pivota. Međutim, kao rezultat svega dobija se vrlo komplikovana i konfuzna metoda. Mnogo poznatiji i korišteniji algoritmi za simetrične matrice su algoritmi zasnovani na Cholesky-jevoj metodi kvadratnog korijena, ali ona je primjenljiva samo na pozitivno definitne matrice, i nije izvodljiva u egzaktnoj aritmetici, jer zahtijeva vađenje kvadratnog korijena. Ova metoda je specifična i nema svoju formu za slučaj nesimetričnih matrica, a ista se može tretirati kao specijalan slučaj i LU i LDU metode.

Mada se ove metode, Gauss-ova metoda i LU faktorizacija, sa matematičkog gledišta suštinski ne razlikuju u smislu da su one na izvjestan način međusobno ekvivalentne, **one se i te kako međusobno razlikuju sa aspekta adekvatne implementacije na računaru. Ovdje se prije svega misli na brzinu, potreban memorijski prostor i tačnost metoda.** Naime, pri mnogim čisto teoretskim matematskim razmatranjima potpuno se zanemaruje činjenica da računarska aritmetika sa realnim brojevima nije egzaktna (zbog ograničene tačnosti zapisa realnih brojeva), tako da matematski posve ekvivalentni izrazi mogu davati potpuno različite rezultate.

### c) Algoritmi zasnovani na rekurzivnoj dekompoziciji

Konačno, treća grupa algoritama zasnovana je na rekurzivnoj dekompoziciji matrice na submatrice. Ove metode razvijene su prevashodno teoretski sa ciljem da se dokaže da, gledano asimptotski, metode iz prethodne skupine nisu optimalne. Mada, teoretski gledano, ove metode imaju vrijeme izvršavanja približno proporcionalno sa  $n^\alpha$  gdje je  $\alpha < 3$ , odgovarajući koeficijenti proporcionalnosti su toliko veliki da ove metode postaju brže od Gauss-ove eliminacije tek za enormno velike sisteme. Od svih metoda ovog tipa, jedino Strassen-ova metoda ima neki praktični značaj, čije je vrijeme izvršavanja približno proporcionalno sa  $n^{2.81}$ , ali zbog velikog koeficijenta proporcionalnosti i ona daje poboljšane performanse tek za sisteme sa više hiljada jednačina, vrlo je komplikovana za implementaciju i numerički je znatno nestabilnija u odnosu na metode iz prethodne klase, tako da je pitanje da li i za takve sisteme ona može dati praktično upotrebljive rezultate. Metoda koju su razvili Coppersmith i Winograd ima vrijeme izvršavanja približno proporcionalno sa  $n^{2.38}$ , ali njihova metoda nema nikakav praktični značaj (ponovo zbog iznimno velikog koeficijenta proporcionalnosti), s obzirom da bi se eventualna poboljšanja u performansama mogla osjetiti tek na sistemima koji su toliko veliki da prevazilaze memorijske mogućnosti današnjih računara. Slijedi da za bilo kakva praktična izračunavanja dolaze u obzir samo metode iz prethodne skupine, zasnovane na upotrebi trouglastih matrica. Drugim riječima, ograničeni smo na metode sa redom složenosti  $n^3$ , ali ono što nam je cilj je da pokušamo učiniti koeficijent proporcionalnosti što je god moguće manjim.

Predložena doktorska disertacija predstavlja teoretsko i praktično istraživanje iz oblasti algoritama zasnovanih na direktnim metodama rješavanja sistema linearnih algebarskih jednačina, kritičkoj analizi postojećih algoritama, njihovoj međusobnoj komparaciji i unapređenju za slučaj simetričnih matrica, te rezvoju novih algoritama koji će po funkcionalnosti biti bolji od postojećih.

### 3. Stanje u oblasti kojoj tema pripada

Radovi koji su do sada urađeni u ovoj oblasti predstavljaju u znatnoj mjeri opšte poznate numeričke algoritme linearne algebre [1,2] i opštepoznata znanja iz elektrotehnike [3,4,5], a mogu se svrstati u tri grupe [6]:

#### 3.1 Algoritmi bazirani na Cramer-ovim pravilima

Prvu grupu čine radovi koji se bave računanjem determinante i primjenom Cramer-ovog pravila. Ovdje se prije svega misli na računanje determinante pomoću permutacija, a to su radovi Leibniz-a i Newton-a. Kao što je već rečeno, takve metode su više značajne za teoretska razmatranja, nego za praktične primjene, mada im se mogu naći i neke praktične primjene, kao što je već napomenuto u uvodnim razmatranjima. Ukupan broj računanja kod ovih algoritama je reda  $n(n+1)!$  što je ujedno i njihovo glavno ograničenje. Ovome broju treba dodati i vrijeme izvršavanja algoritma za realizaciju permutacija.

Nešto bolje performanse daje Laplace-ov razvoj čiji algoritam zahtjeva dvostruki memorijski prostor, te ukupan broj računanja reda  $n!$ . Ovom broju treba dodati isti broj računanja predznaka minora. Isto tako kod ovog algoritma kao otežavajuća okolnost javlja se enormno velik broj premještanja elemenata. Navedene slabosti čine ove algoritme upotrebljivim za do desetak jednačina. Za sisteme do sedam jednačina ovi algoritmi su uporedivi sa ostalim algoritmima za rješavanje sistema linearnih algebarskih jednačina.

Svi navedeni algoritmi se rješavaju rekurzivnim programiranjem. Poboljšanje tačnosti kod ovih algoritama moguće je samo povećanjem preciznosti memorijske varijable kojom se računa vrijednost determinante.

Kako ove metode za računanje determinante ne koriste aritmetičku operaciju dijeljenja, to su one na skupu cijelih brojeva najtačnije metode za računanje determinante i rješavanje sistema linearnih algebarskih jednačina. Aritmetička operacija dijeljenja se koristi samo po jednom za računanje vrijednosti nepoznatih. Ova činjenica ima za posljedicu izbjegavanje grešaka koje se javljaju u računarima kod aritmetičke operacije dijeljenja čiji rezultat nije cijeli broj, a čiju je vrijednost nemoguće pamtiti u računarima usljed čega dolazi do grešaka u računanju, osim ukoliko se ne izvede poseban sistem računanja sa racionalnim brojevima koji simulira računske operacije sa razlomcima pamteći posebno brojnik i nazivnik svakog racionalnog broja, što je dopunska komplikacija i negativno utiče na brzinu rada [6–9]. Karakteristično je da ni za jedan od navedenih algoritama do sada nije nađen nikakav način ubrzanja za simetrične matrice [10].

#### 3.2 Algoritmi zasnovani na trouglastim matricama

Ovu grupu radova čine radovi koji uvode algoritme koje se koriste trouglastim matricama. Ovo se prije svega odnosi na Gauss-ov algoritam svođenja matrice na ekvivalentnu trouglastu matricu i njemu srodni algoritmi zasnovani na LU faktORIZACIJI (Cholesky, Crout, Doolittle) [11].

Ovo su načelno tačne metode (tj. teoretski one daju posve tačan rezultat), ali zbog prirode računarske aritmetike sa realnim brojevima, koja nije tačna, pri računanju elemenata matrica

dolazi do grešaka. Veličina ove greške prije svega zavisi od programskog okruženja i prirode elemenata matrice sistema A i komponenti vektora b. Na veličinu ove greške može se donekle uticati izborom glavnog elementa, pivotiranjem. Pored toga, ovi algoritmi su mogući samo pod uslovom da su svi dijagonalni minori različiti od nule. Ovaj problem se isto tako rješava pivotiranjem. Dva su glavna načina pivotiranja:

- Potpuno pivotiranje;
- Djelimično (parcijalno) pivotiranje.

Gauss-ov algoritam jedini ima mogućnost povećanja tačnosti i potpunim i parcijalnim pivotiranjem, dok LU faktORIZACIJE daju mogućnost samo parcijalnog pivotiranja (teoretski je potpuno pivotiranje moguće i kod LU faktORIZACIJE, ali zahtijeva toliko veliki broj premještanja elemenata da vrijeme koje se potroši na pivotizaciju premašuje trajanje čitavog ostatka algoritma). Zbog uštede vremena sasvim je zadovoljavajuće prije pokretanja bilo kog algoritma na početku izvršiti potpuno pivotiranje, a u toku izvršavanja algoritma vršiti samo parcijalno, djelimično pivotiranje. Na ovaj način se znatno skraćuje vrijeme izvršavanja algoritma, skoro dva puta, uz skoro istu tačnost. Pored izbora glavnog elementa ponekad se za smanjenje greške računanja, odnosno povećanja stabilnosti algoritma, koristi normiranje matrice [12–16].

Radove iz ove oblasti možemo podijeliti u dvije grupe:

- a) Algoritmi zasnovani na trouglastim matricama za nesimetrične matrice;
- b) Algoritmi zasnovani na trouglastim matricama za simetrične matrice.

#### **a) Algoritmi zasnovani na trouglastim matricama za nesimetrične matrice**

LU faktORIZACIJA kao dominantan algoritam ove grupe poznat je u obliku Doolittle-a i Crout-a. Doolittle-ov algoritam zbog načina računanja elemenata matrica U i L nešto je povoljniji sa aspekta pivotiranja u odnosu na Crout-ov algoritam. Naime, Doolittle-ovim algoritmom prvo se izračunaju svi elementi nekog reda matrice U, a zatim elementi iste kolone matrice L, što je znatna prednost ukoliko se želi pivotiranje ili je neki od dijagonalnih minora jednak nuli. Zbog načina računanja elemenata matrica U i L, jedan element matrice U pa jedan element matrice L, Crout-ov algoritam, iako zahtjeva manje jednu programsku petlju od Doolittle-ovog algoritma, neznatno je sporiji i ima komplikovanije pivotiranje, a posebno u slučaju kada je neki glavni dijagonalni minor jednak nuli [17–19].

Prednost Crout-ovog algoritma u odnosu na Doolittle-ov je izvođenje algoritma za simetrične matrice, kako  $LDL^T$  algoritma tako i LU algoritma za simetrične matrice, a što će biti i predstavljano u predloženom doktorskom radu.

Ovi algoritmi koriste se za rješavanje sistema i do nekoliko desetina hiljada jednačina. Vremenska složenost ovih algoritama je reda  $n^3$ . Mada u suštini svi ovi algoritmi imaju isti broj računskih operacija, zbog nekih tehničkih detalja vezanih za pristup memoriji LU faktORIZACIJA pri implementaciji na računaru ima nešto veću brzinu od Gauss-ovog algoritma, odnosno skoro je dva puta brža [20–22].

Računanje vrijednosti determinante ovim algoritmima jako je jednostavno i ono predstavlja proizvod svih dijagonalnih elemenata matrice U.

I pored toga što LU faktORIZACIJA ima neznatno više matematičkih operacija od Gauss-ovog algoritma eliminacija, prednost ove metode u odnosu na Gauss-ovu metodu eliminacija znatno dolazi do izražaja kod računanja inverzne matrice. Naime, računanje inverzne matrice algoritmima zasnovanim na Gauss-ovoj metodi eliminacija višestruko je sporije i dosta komplikovanije od računanja inverzne matrice LU faktORIZACIJOM. Inače, računanje inverzne matrice LU faktORIZACIJOM traje tri puta duže i ima tri puta više računskih operacija, od rješavanja sistema linearnih algebarskih jednačina [23–25] istim algoritmom. Iako dosta sporiji od LU faktORIZACIJE Gauss-ov algoritam eliminacija ponekad se koristi u modifikovanom obliku kao Gauss-Jordanov algoritam eliminacija [26].

Međutim, unaprijeđena Gauss-ova metoda koja se predlaže u radu (nazvana Gauss-Xp metoda), daje bolje rezultate od LU faktORIZACIJE za rješavanje sistema linearnih algebarskih jednačina, a pored toga, predložena metoda daje najbolji način računanja inverzne matrice (brža je za iznos reda  $n^2$  u odnosu na LU faktORIZACIJU), te najbolji i najjednostavniji način računanja inverzne matrice, kako za donju troglastu tako i za gornju troglastu matricu. Predložena metoda preuzima sve prednosti LU faktORIZACIJE u odnosu na klasičnu Gauss-ovu metodu eliminacije, ali uvodi i dodatne prednosti, ali je pored toga logički neuporedivo prirodnija i elegantnija od LU faktORIZACIJE, tako da je jako povoljna i sa pedagoškog aspekta (onima kojima se prezentuje, znatno je shvatljivija od LU faktORIZACIJE, koja neupućenima često djeluje veoma konfuzno i neprirodno, što se pokazalo kroz pedagošku praksu).

#### **b) Algoritmi zasnovani na trouglastim matricama za simetrične matrice**

Što se tiče algoritama za simetrične matrice, tu je svakako najznačajnija metoda kvadratnog korijena ili metoda Cholesky-og za LU odnosno LDU faktORIZACIJU, a koja ne vrijedi uopšteno na skupu realnih brojeva nego samo za pozitivno definitne matrice, odnosno matrice koje imaju pozitivne sve sopstvene vrijednosti (sretna je okolnost da se one u linearnim sistemima koji opisuju realne pojave najčešće i javljaju, ali ipak ne uvijek). Na skupu kompleksnih brojeva, što ima primjenu recimo u kolima naizmjenične struje, ova metoda vrijedi za većinu simetričnih matrica, ali je opet ograničavaju matematičke operacije kojima se koristi ova metoda. Naime, tu se javlja potreba za korijenovanjem kompleksnog broja, te nešto veći broj matematičkih operacija. Posebno je značajan nedostatak adekvatnog načina pivotiranja (izbora glavnog elementa), a koji posebno doolazi do izražaja na skupu kompleksnih brojeva, jer u kolima naizmjenične struje matrica sistema često jeste simetrična ali nije uvijek dijagonalno dominantna [27]. Kod pozitivno definitnih realnih matrica, dokazuje se da je metoda Cholesky-og numerički stabilna čak i bez pivotiranja, ali za matrice koje nisu pozitivno definitne, to ne mora vrijediti.

Bitno je napomenuti i to da za klasičnu Gauss-ovu metodu eliminacija nisu dosada publikovani radovi koji bi iskoristili eventualnu simetriju matrice, odnosno dosada se smatralo da klasična Gauss-ova eliminacija ne može iskoristiti eventualnu simetriju matrice. Isto tako, napomenimo, da se LDU metoda faktORIZACIJE, koja za slučaj simetričnih matrica ima oblik  $LDL^T$  i koja je započeta u radovima Crout-a a dovršena u skorije vrijeme u radovima J. R. Bunch-a, ponekad nedosljedno naziva Gauss-ovom metodom eliminacija za simetrične matrice [28], jer je izvedena iz Gauss-ove PAQ metode, mada se u principu ne radi o Gauss-ovoj eliminaciji nego o

varijanti LDU faktORIZACIJE. Mada ova metoda vrijedi uopšteno za većinu simetričnih matrica a ne samo za pozitivno definitne, ista ima nešto više matematičkih operacija (reda  $n^2$ ) i pristupa elementima matrice [29–32] od metoda koje će biti izložene u radu, odnosno sporija je od metoda koje se razmatraju u radu.

Pored toga,  $LDL^T$  faktORIZACIJA može da zakaže kod izvjesnih tipova matrica, recimo onih koje imaju nulu u gornjem lijevom uglu, ili sve elemente na glavnoj dijagonali jednake nuli, ukoliko se ne izvrši pažljivo izbor glavnih elementata. Međutim, izbor glavnih elemenata za potrebe  $LDL^T$  faktORIZACIJE je dosta komplikovan i spor. U radu se predlaže nova varijanta dijagonalnog izbora glavnog elementa, koji se uspješno može koristiti i za potrebe  $LDL^T$  faktORIZACIJE, mada za tim nema potrebe, jer su metode koje se predlažu u ovom radu brže, jednostavnije i logički elegantnije od  $LDL^T$  faktORIZACIJE.

Vrijednost determinante kod  $LDL^T$  algoritma se računa kao proizvod elemenata matrice D, a kod Cholesky algoritma kao kvadrat proizvoda elemenata na glavnoj dijagonali.

Isto tako, računanje inverzne matrice u slučaju simetrične matrice metodom Cholesky-og, koja je nešto bolja od  $LDL^T$  faktORIZACIJE i najčešće korišteni algoritam za računanje inverzne matrice [33, 34], ima nešto više matematičkih operacija (reda  $n^2$  plus  $n$  korjenovanja) i pristupa elementima matrice od metoda koje će biti izložene u radu, odnosno neznatno je sporija od metoda koje se razmatraju u radu, a kao što je već rečeno ista ne vrijedi za sve slučajeve simetričnih matrica.

### 3.3 Algoritmi zasnovani na rekurzivnoj dekompoziciji

Što se tiče algoritama iz ove skupine, već je rečeno da algoritmi zasnovani na ovim metodama imaju uglavnom samo teoretski značaj sa ciljem da se istraže granice do koje se može spustiti asimptotska složenost metoda za rješavanje sistema jednačina. Među tim metodama treba istaći metodu Strassen-a [35], koja bi i mogla imati izvjesne primjene, ali za sisteme čija kompleksnost izlazi izvan sfere inženjerske prakse, te metodu Coppersmith-a i Winograd-a [36], za koju je jasno da nema nikakvu praktičnu primjenu.

## 4. Motivacija

Svi navedeni algoritmi suštinski se mogu podijeliti na osnovu najčešćeg slučaja u inženjerskoj praksi, a to je da li algoritam ima način postizanja dva puta veće brzine u slučaju simetričnih matrica? Jedina metoda koja ima obuhvaćen slučaj simetričnih matrica je LDU dekompozicija. Algoritam Cholesky-og je specifičan slučaj i kao što je rečeno vrijedi samo za pozitivno definitne matrice. Algoritmi:

- Gauss-ov algoritam eliminacija
- LU faktORIZACIJA (dekompozicija)



nemaju razvijen algoritam za slučaj simetričnih matrica. Naravno, algoritmi za simetrične matrice osim što su brži, oni daju i tačnije rezultate od slučaja da se matrica sistema iako je simetrična tretira kao nesimetrična matrica.

Isto tako, algoritmi koji se temelje na upotrebi trouglastih matrica, imaju praktično isti broj računskih operacija, a ipak im se vremena izvršavanja i te kako razlikuju. Najbrža od svih predloženih metoda je LU faktORIZACIJA, koja je skoro dva puta brža od Gauss-ove, što u startu stvara sumnju u kvalitet programskog rješenja. LU faktORIZACIJA je dosta nejasan algoritam, ali daje mogućnost računanja kumulativne sume, a to joj daje znatnu prednost u odnosu na Gauss-ov algoritam. Logično se nameće pitanje mogućnosti unapređenja Gausov-og algoritma.

Sve navedene metode su tačne, ali skup realnih brojeva na računaru je samo aproksimacija skupa realnih brojeva. Uslijed ove činjenice, navedeni algoritmi se međusobno isto tako razlikuju u pogledu tačnosti krajnjih rezultata. Poboljšanje tačnosti se kod svih metoda vrši izborom glavnog elementa, pivotiranjem. Jedino Gauss-ov algoritam daje mogućnost potpunog pivotiranja, a što ima za posljedicu još duže vrijeme izvršavanja algoritma. Za algoritam Cholesky-og nema razvijen način pivotiranja, a za  $LDL^T$  algoritam Bunch daje dosta komplikovan algoritam dijagonalnog pivotiranja, što ovu metodu čini još komplikovanijom

Kako se većina numeričkih algoritama svodi na rješavanje sistema linearnih algebarskih jednačina, to je svaki pomak u ovoj oblasti od izuzetnog značaja.

**Budući da postojeći algoritmi zasnovani na direktnim metodama nisu u potpunosti zaokruženi, predloženi doktorski rad predstavlja naučni doprinos u smislu dopune postojećih algoritama i metoda za slučaj simetričnih matrica, te iznalaženju novih algoritama i metoda koje su sa aspekta naučnih analiza prihvatljivije i bolje od postojećih algoritama i metoda, kao i iznalaženju adekvatnije implementacije postojećih algoritama na računaru u cilju postizanja veće brzine obrade, bolje tačnosti, većoj pogodnosti za paralelnu implementaciju, i minimalnih memorijskih zahtjeva.**

## 5. Osnovni cilj i plan istraživanja

Cilj rada je sagledavanje postojećih algoritama za rješavanje tipičnih problema linearne algebre zasnovanih na direktnim metodama za rješavanje sistema linearnih algebarskih jednačina, uočavanje njihovih razlika i njihove praktične primjene, **te mogućnost njihovog daljnjeg razvoja i nadogradnje, kako u matematičkom modelu tako i u njihovoj implementaciji.** Posebna pažnja će se posvetiti simetričnim matricama, jer metode za takve forme matrica mogu biti i do dva puta brže, a zadovoljavajuće forme koje na adekvatan način koriste eventualnu simetriju matrice nisu razvijene ni za jednu od navedenih metoda. Isto tako, znanstveno će se porediti dva dominantna algoritma u ovoj oblasti, Gauss-ov algoritam eliminacija i LU faktORIZACIJA, te će se ukazati na prednosti i nedostatke ovih algoritama, a **predložiti će se i bolje rješenje od postojećeg.** Za ostvarivanje postavljenog cilja istraživanje kojim se bavi predložena disertacija odvijat će se po slijedećem planu:

1. Razvoj i testiranje algoritma za rekurzivno računanje determinante, te njegova dogradnja za slučaj simetričnih matrica;
2. Razvoj i testiranje Gauss-ovog algoritma eliminacija za slučaj simetričnih matrica;
3. Razvoj i testiranje LU faktORIZACIJE za slučaj simetričnih matrica;
4. Razvoj i testiranje unaprijeđenog Gauss-ovog algoritma eliminacija;
5. Razvoj i testiranje unaprijeđenog Gauss-ovog algoritma eliminacija za slučaj simetričnih matrica;
6. Poređenje unprijeđenog Gauss-ovog algoritma sa izvornim Gauss-ovim algoritmom i LU faktORIZACIJOM;
7. Poređenje unprijeđenog Gauss-ovog algoritma sa izvornim Gauss-ovim algoritmom, LU faktORIZACIJOM i metodom Cholesky-og za slučaj simetričnih matrica;
8. Razvoj algoritma za poboljšanje tačnosti unprijeđenog Gauss-ovog algoritma za slučaj simetričnih matrica;
9. Razvoj algoritma za simetrične matrice za slučaj da su svi elementi na glavnoj dijagonali jednaki nuli;
10. Primjena razvijene teorije i predloženih algoritama na rješavanje drugih problema linearne algebre, recimo problema zasnovanih na homogenim sistemima jednačina i još nekim drugih problema.

## 6. Metodologija istraživanja

Metodologija koja će se koristiti pri izradi ovog rada je spoznajna, induktivnog i deduktivnog karaktera zaključivanja, uz primjenu potpune matematičke indukcije te tehnička potvrda valjanosti datih metoda njihovom implementacijom na računaru u programskom okruženju C++. Za svaki od algoritama, kako za postojeće tako i za novorazvijene, numerički će se testirati:

- Vremenska zavisnost algoritma o broju jednačina;
- Nad skupom slučajno generisanih elemenata matrice sistema testirat će se tačnost metodima statističke simulacije;
- Nad simetričnim matricama čiji se elementi slučajno generišu testirat će se brzina i tačnost;
- Testirat će se tačnost i vrijeme izvršavanja algoritma za slučaj generisanja inverzne matrice;
- Testirat će se tačnost i vrijeme izvršavanja algoritma za slučaj generisanja inverzne matrice simetrične matrice.

## 7. Očekivani izvorni naučni doprinos disertacije

Očekivani izvorni naučni doprinos predložene disertacije ogleda se u uspješnoj nadogradnji postojećih algoritama i metoda u smislu njihove uspješnosti kao metoda pri primjeni na simetričnim matricama, te razvojem i implementaciji novih algoritama i metoda. U predloženoj disertaciji će biti razvijene sljedeći originalni algoritmi i metode:

- a) Algoritam rekurzivnog računanja determinante,
  - 1. Razvoj determinante po prvoj koloni, redu,
  - 2. Razvoj determinante za simetrične matrice po prvoj koloni, redu,
  - 3. Razvoj determinante po zadnjoj  $n$ -toj koloni, redu,
  - 4. Razvoj determinante za simetrične matrice po po zadnjoj  $n$ -toj koloni, redu.
- b) Algoritmi koji se zasnivaju na svođenju na trouglastu matricu:
  - 1. Gauss-ov algoritam za simetrične matrice,
  - 2. LU faktORIZACIJA za simetrične matrice,
  - 3. Gauss- $X_p$  algoritam,
  - 4. Gauss- $X_p$  algoritam za simetrične matrice.
- c) Gauss-ov algoritam, LU faktORIZACIJA i Gauss- $X_p$  algoritam za dijagonalno pojasne matrice.
- d) Algoritmi za neke druge probleme linearne algebre, koji kao potprograme koriste algoritme razvijene pod a), b) i c), ili makar ideje preuzete iz ovih algoritama.

**Jasno, svi navedeni algoritmi vrijede uopšteno.**

Pored navedenih algoritama u radu će biti predstavljen jedan novi način izbora glavnog elementa koji se može nazvati dijagonalno pivotiranje (bez obzira što Bunch dijagonalnim pivotiranjem naziva nešto mnogo komplikovanije), koji se uspješno može implementirati i na simetričnim i nesimetričnim matricama, kako na novorazvijenim algoritmima tako i na postojećim, te algoritam za simetrične matrice za slučaj kada su svi dijagonalni elementi jednaki nuli. Isto tako, za svaki od algoritama, bit će dat način računanja determinante i inverzne matrice koji je nešto bolji u slučaju Gauss  $X_p$  algoritma od LU faktORIZACIJE i metode Cholesky-og čiji ubrzani način opisuje Krishnamoorthy [33].

Napominjem da je jedan dio novih algoritama publikovan u radu:

- S. Delić, Ž. Jurić, “Some Improvements of the Gaussian Elimination Method for Solving Simultaneous Linear Equations”, MIPRO, pp. 96-101, Opatija, 2013.

koji se može naći u bazama Xplore i Scopus, a isti je citiran od strane:

- Shahmansoori, A. ; **Univ. Autonoma de Barcelona**, Bellaterra, Spain ; Montalban, R. ; Lopez-Salcedo, J.A. ; Seco-Granados, G. “Design of OFDM sequences for joint communications and positioning based on the asymptotic expected CRB”, International Conference on Localization and GNSS (ICL-GNSS), Helsinki, 2014.

Isti rad je dalje citiran u drugim izvorima.

## 8. Polazna literatura

- [1] J.F. Grcar, Mathematicians of Gaussian elimination, - Notices of the AMS, 2011.
- [2] David Poole, Linear Algebra: A Modern Introduction (2nd ed.), Brooks/Cole, 2006.
- [3] Yatsko, Hata, CIRCUITS – Principles, Analysis and Symulation, Saunders College Publishing, 1992..
- [4] James W. Nilsson and Susan Riedel, Electric Circuits, 7th Edition, Prentice Hall, May 2004.
- [5] H. W. Hayt and J. E. Kemmerly, Engineering Circuit Analysis, 5<sup>th</sup> ed., McGraw Hill, New York, 1993.
- [6] Leader, Jeffery J. Numerical Analysis and Scientific Computation. Addison Wesley. ISBN 0-201-73499-0. 2004.
- [7] D. Watkins, Fundamentals of Matrix Computations, Wiley, New York, 1991.
- [8] G. W. Stewart, J.-G. Sun, Matrix Perturbation Theory, Academic Press, 1990.
- [9] A. Stuart and J. Voss, Matrix Analysis and Algorithms, 2009.  
<http://seehuhn.de/media/papers/numlinalg.pdf>.
- [10] J. Smit, New recursive minor expansion algorithms, a presentation in a comparative context, Symbolic and Algebraic Computation, 1979 – Springer.
- [11] R. L. Burden, J. D. Faires, Numerical Analysis, 8th ed., Thomson Learning Inc., 2005.
- [12] J.F. Grcar, John von Neumann's analysis of Gaussian elimination and the origins of modern numerical analysis. SIAM Rev. 53: pp. 607-682, 2011.
- [13] J. H. Wilkinson, Rounding Errors in Algebraic Processes, Notes on Applied Science No. 32, Her Majesty's Stationery Office, London, 1963. (Also published by Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ, USA. Reprinted by Dover, New-York, 1994, ISBN 0-486-67999-5.)
- [14] N. J. Higham, Accuracy and Stability of Numerical Algorithms, SIAM, Philadelphia, 1996.
- [15] M. L. Overton, Numerical Computing with IEEE Floating Point Arithmetic, SIAM, Philadelphia, 2001.
- [16] Brian W. Kernighan and Dennis M. Ritchie. The C programming Language Published by Prentice-Hall in 1988.
- [17] J. W. Demmel, Applied Numerical Linear Algebra. SIAM, 1997.
- [18] W. H. Press, S. A. Teukolsky, W. T. Vetterling and B. P. Flannery, Numerical Recipes (The Art of Scientific Computing), 3rd ed., Cambridge University Press, 2007.
- [19] G. H. Golub and C. F. van Loan, Matrix Computations, 3rd ed., Baltimore: Johns Hopkins University Press, 1996.
- [20] K. E. Atkinson, An Introduction to Numerical Analysis (2<sup>nd</sup> edition), John Wiley & Sons, New York, 1989.
- [21] Gentle, J. E. " Gaussian Elimination and Matrix Factorizations." §6.2.1 in Matrix Algebra Theory, Computations, and Applications in Statistics. Stanford University USA: Springer, pp. 207-211, 2007.
- [22] Press, W. H.; Flannery, B. P.; Teukolsky, S. A.; and Vetterling, W. T. "LU Decomposition and Its Applications." §2.3 in Numerical Recipes in FORTRAN: The Art of Scientific Computing, 2nd ed. Cambridge, England: Cambridge University Press, pp. 34-42, 1992..
- [23] R.H. Bartels, G.H. Golub, The simplex method of linear programming using the LU decomposition, Commun. ACM, 12 (1969), pp. 266–268.

- [24] Ries, F. ; De Marco, T. ; Zivieri, M. ; Guerrieri, R., Triangular matrix inversion on Graphics Processing Unit, Conference on of the High Performance Computing Networking, Storage and Analysis, Proceedings, pp.1-10, 2009.
- [25] C. Gilmore , A. Abubakar , W. Hu , T. M. Habashy and P.M. van den Berg "Microwave biomedical data inversion using the finite-difference contrast source inversion method", IEEE Trans. Antennas Propag., vol. 57, no. 5, pp.1528 -1538, 2009.
- [26] Moussa, S. ; Razik, A.M.A. ; Dahmane, A.O. ; Hamam, H., FPGA implementation of floating-point complex matrix inversion based on GAUSS-JORDAN elimination, Canadian Conference on Electrical and Computer Engineering (CCECE), pp. 1-4, Regina, 2013.
- [27] R. A. Horn and C. R. Johnson, Topics in matrix analysis. Cambridge University, 1991.
- [28] Gentle, J. E. "Cholesky Factorization." §5.9.2 in Matrix Algebra Theory, Computations, and Applications in Statistics. Stanford University USA: Springer, pp. 194-195, 2007.
- [29] J. R. Bunch and B. N. Parlett, "Direct methods for Solving Symmetric Indefinite Systems of Linear Equations", SIAM Numerical Analysis, pp. 639-655, 1971.
- [30] J. R. Bunch, "Analysis of the diagonal pivoting method", SIAM Numerical Analysis, pp. 656-680, 1971
- [31] J. R. Bunch and L. Kaufman, "Some Stable Methods for Calculating Inertia and Solving Symmetric Linear Systems", Mathematics of Computation, Vol. 31, No. 137, pp. 163-179, 1977.
- [32] J. Demmel, I. Dumitriu, and O. Holtz, Fast linear algebra is stable, Numer. Math., 108(1):59–91, 2007
- [33] Krishnamoorthy, Aravindh, and Deepak Menon. "Matrix inversion using Cholesky decomposition.", IEEE Conference Publications, Signal Processing: Algorithms, Architectures, Arrangements, and Applications (SPA), pp. 70 – 72, Poznan, 2013.
- [34] Burian, A; Takala, J; Ylinen, M: "A fixed-point implementation of matrix inversion using Cholesky decomposition", Proceedings of the 46th IEEE International Midwest Symposium on Circuits and Systems, pp. 1431-1434 Vol. 3, 2003.
- [35] V. Strassen, "Gaussian Elimination is Not Optimal", Numerische Mathematik, vol. 13, pp. 354-356, 1969.
- [36] D. Coppersmith, S. Winograd, "Matrix Multiplications via Arithmetic Progressions", Journal of Symbolic Computation, vol. 9, pp. 251-280, 1990.

## 9. CURRICULUM VITAE (Biografija)

### 9.1 Lični podaci

Prezime (ime oca) i ime:	Delić (Šaban) Sead
Datum i mjesto rođenja:	20.07.1961., Pedići-Kakanj
Državljanstvo:	Bosna i Hercegovina
Adresa stalnog boravka:	Trg Heroja 8/5, 71 000 Novo Sarajevo
Bračno stanje:	Oženjen, Otac dvoje djece

### 9.2 Obrazovanje

1990. Magistar elektrotehničkih nauka, Elektrotehnički fakultet Sarajevo, smjer AiE, Tema "Koncept uređaja za tehničku dijagnostiku digitalnih modula za upravljanje tehnološkim procesima", mentor prof. dr Dževad Hasanbegović,  
1986. Diplomirani inženjer elektrotehnike, Elektrotehnički fakultet Sarajevo, smjer AiE,  
1980. Gimnazija Kakanj,  
1976. Osnovna škola Brnjic-Kakanj.

### 9.3 Profesionalna aktivnost

2006. - Gimnazija "Muhsin Rizvić" Kakanj, profesor informatike,  
2004. - Preduzeće za automatizaciju "SIGNUM" doo Kakanj,  
2002. - BH Pošta, Savjetnik za informacione sisteme,  
1996. - Preduzeće za automatizaciju "SIGNUM" doo Kakanj,  
1986. - Elektroprivreda BiH, TE "Kakanj"- Čatići, Vodeći inženjer AiE,  
1986. - Energoinvest Sarajevo, Energetska elektronika.

### 9.4 Objavljeni naučni radovi

S. Delić, Ž. Jurić, "Some Improvements of the Gaussian Elimination Method for Solving Simultaneous Linear Equations", MIPRO, pp. 96-101, Opatija, 2013.

koji se može naći u bazama Xplore i Scopus, a isti je citiran od strane:

Shahmansoori, A. ; **Univ. Autonoma de Barcelona**, Bellaterra, Spain ; Montalban, R. ; Lopez-Salcedo, J.A. ; Seco-Granados, G. "Design of OFDM sequences for joint communications and positioning based on the asymptotic expected CRB", International Conference on Localization and GNSS (ICL-GNSS), Helsinki, 2014., a isti rad je dalje citiran.

### 9.5 Objavljene knjige i skripte

1. S. Delić, Finansijsko knjigovodstvo na računaru, Wemill-izdavačka djelatnost urednik V.I. Miličević, Naklada 500 primjeraka, Kiseljak, 1995.
2. S. Delić, Windows XP, skripta „SIGNUM“ doo, Kakanj,
3. S. Delić, MS Office, skripta, „SIGNUM“ doo, Kakanj.

## **9.6 Rješenja u oblasti automatike i elektronike**

1. Bezkontaktno mjerenje broja obrtaja turbine, TE "Kakanj", Blok V, 1989,
2. Regulacija nivoa u bubnju, TE "Kakanj" Blok VII, 1990,
3. Regulacija snage, TE "Kakanj", Blok VII, 1991.

## **9.7 Programska rješenja**

1. Finansijsko knjigovodstvo,
2. Materijalno knjigovodstvo,
3. Pogonsko knjigovodstvo,
4. Knjigovodstvo stalnih sredstava,
5. Obračun plata,
6. Personalna evidencija.
7. Model atoma,
8. Sistemi linearnih jednačina,
9. Sistemi nelinearnih jednačina,
10. Teslino obrtno magnetno polje.

## **9.8 Nagrade i priznanja**

Prijedlog za zlatnu medalju za kvalitet proizvoda, Trade Leaders Club, Paris, 2003.