UNIVERZITET U SARAJEVU
Elektrotehnički fakultet u Sarajevu

Prijemni ispit (07.07.2008.)

Broj zadatka	Tekst zadatka – grupa A
1.	U jednačini: $(\mathbf{m}-2)\mathbf{x}^2-2\mathbf{mx}+2\mathbf{m}-3=0$, treba odrediti sve vrijednosti parametra **m** tako da rješenja te jednačine budu pozitivna.
2.	Riješiti trigonometrijsku jednačinu: $\cos^2\mathbf{x}+3\cos\mathbf{x}=\cos 2\mathbf{x}-\sin^2\mathbf{x}$.
3.	Riješiti nejednačinu: $\log(\log\mathbf{x})+\log(\log\mathbf{x}^3-2)>0$, u skupu realnih brojeva.
4.	Odrediti kompleksne brojeve **z** koji zadovoljavaju uslove: $\left\|\frac{\mathbf{z}-8\mathbf{i}}{12-\mathbf{z}}\right\|=\frac{3}{5}$, $\left\|\frac{\mathbf{z}-4}{\mathbf{z}-8}\right\|=1$, gdje je **i** imaginarna jedinica.
5.	Površina trougla je 8 (kvadratnih jedinica), a dva njegova vrha su u tačkama A(1, -2), B(2, 3). Odrediti koordinate trećeg vrha ako on pripada pravcu p: $\mathbf{y}=-2\mathbf{x}+2$.

Napomene:

- Svi zadaci se vrednuju isto, sa po maksimalno 8 bodova.
- Na dijelu prve stranice, predviđenom za upis ličnih podataka, napiše se ime i prezime, presavije taj dio papira i zalijepi. Na ostalim dijelovima papira **ne smije** biti napisano ime, prezime, šifra ili bilo koja druga karakteristična oznaka, nego samo rad zadataka.
- Preliminarni rezultati predmetnog testa iz matematike, kao i sveukupnog uspjeha na prijemnom ispitu, objavit će se u srijedu 09.07.2008. godine , oko 15.00 časova, na WEB – u ETF-a, i na oglasnoj ploči na ulazu u fakultet.

Komisija za prijem studenata na I godinu studija
na Elektrotehnički fakultet u Sarajevu, školske
2008/2009 godine.

OVAJ DIO POPUNJAVA KOMISIJA

IME I PREZIME KANDIDATA	BROJ BODOVA PO ZADACIMA					UKUPAN BROJ BODOVA
	1	2	3	4	5	

Rješenja:

1. Da bi kvadratna jednačina $\mathbf{ax}^2+\mathbf{bx}+\mathbf{c}=0$ imala pozitivna rješenja, potrebno je i dovoljno da budu ispunjeni sljedeći uslovi:

   a. diskriminanta jednačine mora biti nenegativna, $\mathbf{D}\equiv\mathbf{b}^2-4\mathbf{ac}\geq 0$;

   b. zbir rješenja (Vietova pravila), mora biti pozitivan, $\mathbf{x}_1+\mathbf{x}_2\equiv-\dfrac{\mathbf{b}}{\mathbf{a}}>0$;

   c. proizvod rješenja (Vietova pravila), mora biti pozitivan, $\mathbf{x}_1\bullet\mathbf{x}_2\equiv\dfrac{\mathbf{c}}{\mathbf{a}}>0$.

   Uvrštavajući odgovarajuće vrijednosti parametara a, b, i c za datu jednačinu, slijedi:

   a. $4\mathbf{m}^2-4(\mathbf{m}-2)(2\mathbf{m}-3)=-4(\mathbf{m}-1)(\mathbf{m}-6)\geq 0$;

   b. $-\dfrac{-2\mathbf{m}}{\mathbf{m}-2}>0$;

   c. $\dfrac{2\mathbf{m}-3}{\mathbf{m}-2}>0$.

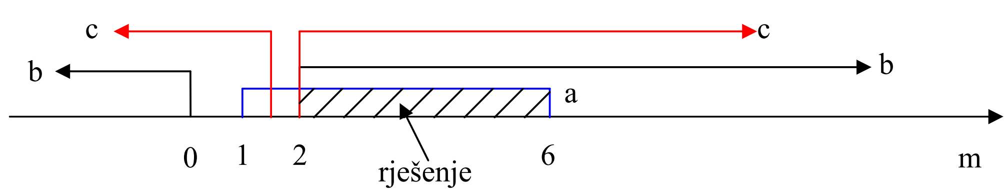
   Rješenja odgovarajućih nejednačina su:

   a. $1\leq\mathbf{m}\leq 6$;

   b. $\mathbf{m}<0$ ili $\mathbf{m}>2$;

   c. $\mathbf{m}<\dfrac{3}{2}$ ili $\mathbf{m}>2$.

   Zajedničko rješenje je presjek rješenja pod a, b i c, i najjednostavnije ga je naći grafički:



   Rješenje zadatka je: $2<\mathrm{m}\leq 6$; odnosno: $\mathrm{m}\in(2,6]$.

2. Da bi data jednačina imala rješenja mora biti zadovoljen uslov: $|\cos\mathbf{x}|\leq 1$.

   Data jednačina se primjenom trigonometrijskih identiteta transformiše u sljedeću jednačinu:

   $\cos^2\mathbf{x}+3\cos\mathbf{x}=\cos 2\mathbf{x}-\sin^2\mathbf{x}$;

   $\cos^2\mathbf{x}+3\cos\mathbf{x}-\cos 2\mathbf{x}+\sin^2\mathbf{x}=0$;

   $\cos 2\mathbf{x}-3\cos\mathbf{x}-1=0$;

   $2\cos^2\mathbf{x}-3\cos\mathbf{x}-2=0$

   Rješavanjem ove kvadratne jednačine po cosx, slijede rješenja:

   $\cos\mathbf{x}_1=-\dfrac{1}{2}$; $\cos\mathbf{x}_2=2$.

   Zbog uslova $|\cos\mathbf{x}|\leq 1$, drugo rješenje se odbacuje tako da je validno samo prvo rješenje, gdje se dobije:

   $$\mathbf{x}=\pm\frac{2\pi}{3}+2\mathbf{k}\pi,\ \mathbf{k}\in\mathbf{Z}$$

3. Da bi data jednačina imala rješenja moraju biti zadovoljeni sljedeći uslovi:

   a. $\mathbf{x}>0$; (oblast definisanosti funkcije $\log x$);
   b. $\log\mathbf{x}>0$, odnosno $\mathbf{x}>1$; (oblast definisanosti funkcije $\log(\log x)$);
   c. $\log\mathbf{x}^3-2>0 \Rightarrow 3\log x>2$, odnosno $\mathbf{x}>\sqrt[3]{100}$; (oblast definisanosti funkcije $\log(\log x^3-2)$);

   Rješavanjem date nejednačine slijedi:

   $$\log(\log\mathbf{x})+\log(\log\mathbf{x}^3-2)>0 \Rightarrow$$
   $$\log(\log\mathbf{x}\bullet(3\log\mathbf{x}-2))>0 \Rightarrow$$
   $$\log\mathbf{x}\bullet(3\log\mathbf{x}-2)>1 \Rightarrow$$
   $$3\log^2\mathbf{x}-2\log\mathbf{x}-1>0$$

   Smjenom: $\log x=t$, dobije se:
   $$3\mathbf{t}^2-2\mathbf{t}-1>0$$

   Dobijena kvadratna nejednačina ima rješenje: $\mathbf{t}<-\frac{1}{3}$, ili $t>1$, odnosno,

   $\log x<-\frac{1}{3} \Rightarrow 0<x<\frac{1}{\sqrt[3]{10}}$, ili $\log x>1 \Rightarrow x>10$

   Uzimajući u obzir navedene uslove pod a, b i c, zbog oblasti definisanosti funkcija, rješenje date nejednačine je:

   $x>10$

4. Stavljajući da je $z=x+iy$, $(x,y \in R)$, i kvadriranjem datih izraza slijedi:

   $$25|x+iy-8i|^2=9|12-\mathbf{x}-\mathbf{iy}|^2,\ |\mathbf{x}+\mathbf{iy}-4|^2=|\mathbf{x}+\mathbf{iy}-8|^2, \text{ odnosno:}$$

   $$25\left[x^2+(\mathbf{y}-8)^2\right]=9\left[(12-x)^2+\mathbf{y}^2\right],\ \left[(x-4)^2+\mathbf{y}^2\right]=\left[(x-8)^2+\mathbf{y}^2\right]$$

   Rješavanjem druge jednačine slijedi da je: $x=6$, i uvrštavanjem u prvu jednačinu slijedi kvadratna jednačina:
   $y^2-25\mathbf{y}+136=0$, čija su rješenja:
   $y_1=8,\ \mathbf{y}_2=17$

   Na osnovu toga su rješenja zadatka:

   $z_1=6+8i$
   $z_2=6+17i$

5. Neka su koordinate tačke C, x_C i y_C.

Kako tačka C leži na pravcu *p*, to zadovoljava relaciju:

$$\mathbf{y_C} = -2\mathbf{x_C} + 2 \qquad (*)$$

Površina trougla datog koordinatama tačaka (x_1, z_1), (x_2, y_2) i (x_3, y_3) data je izrazom:

$$\mathbf{P} = \left|\frac{1}{2}\left[\mathbf{x}_1(\mathbf{y}_2 - \mathbf{y}_3) + \mathbf{x}_2(\mathbf{y}_3 - \mathbf{y}_1) + \mathbf{x}_3(\mathbf{y}_1 - \mathbf{y}_2)\right]\right|$$

Uvrštavanjem vrijednosti koordinata datih tačaka slijedi:

$$2\mathbf{P} = \left|\left[1\bullet(3 - \mathbf{y_C}) + 2\bullet(\mathbf{y_C} + 2) + \mathbf{x_C}(-2-3)\right]\right|, \Rightarrow$$
$$16 = \left|7 + \mathbf{y_C} - 5\mathbf{x_C}\right|$$

Iz posljednje relacije i relacije (*) slijede dva sistema jednačina:

a.

$$\mathbf{y_C} = -2\mathbf{x_C} + 2$$
$$16 = 7 + \mathbf{y_C} - 5\mathbf{x_C}$$

Rješenje ovog sistema je: $\mathbf{x_{C1}} = -1$, $\mathbf{y_{C1}} = 4$.

b.

$$\mathbf{y_C} = -2\mathbf{x_C} + 2$$
$$16 = -(7 + \mathbf{y_C} - 5\mathbf{x_C})$$

Rješenje ovog sistema je: $\mathbf{x_{C2}} = \frac{25}{7}$, $\mathbf{y_{C2}} = -\frac{36}{7}$.

Rješenje zadatka je: $\mathbf{C}_1(-1, 4)$; $\mathbf{C}_2(\frac{25}{7}, -\frac{36}{7})$