UNIVERZITET U SARAJEVU
Elektrotehnički fakultet u Sarajevu

Prijemni ispit (07.07.2008.)

Broj zadatka	Tekst zadatka – grupa B
1.	U jednačini: $(\mathbf{m}-2)\mathbf{x}^2-2\mathbf{mx}+2\mathbf{m}-3=0$, treba odrediti sve vrijednosti parametra **m** tako da oba njena rješenja pripadaju intervalu (0, 5).
2.	Riješiti trigonometrijsku jednačinu: $\sin^2\mathbf{x}+3\cos\mathbf{x}=\cos 2\mathbf{x}-\cos^2\mathbf{x}$.
3.	Riješiti nejednačinu: $\log(\log\mathbf{x})+\log(\log\mathbf{x}^3-2)<0$, u skupu realnih brojeva.
4.	Odrediti kompleksne brojeve **z** koji zadovoljavaju uslove: $\left\|\frac{\mathbf{z}-12}{8\mathbf{i}-\mathbf{z}}\right\|=\frac{5}{3}$, $\left\|\frac{\mathbf{z}-8}{\mathbf{z}-4}\right\|=1$, gdje je **i** imaginarna jedinica.
5.	Površina trougla je 8 (kvadratnih jedinica), a dva njegova vrha su u tačkama A(-1, -2), B(-2, 3). Odrediti koordinate trećeg vrha ako on pripada pravcu p: $\mathbf{y}=2\mathbf{x}+2$.

Napomene:

- Svi zadaci se vrednuju isto, sa po maksimalno 8 bodova.
- Na dijelu prve stranice, predviđenom za upis ličnih podataka, napiše se ime i prezime, presavije taj dio papira i zalijepi. Na ostalim dijelovima papira **<u>ne smije</u>** biti napisano ime, prezime, šifra ili bilo koja druga karakteristična oznaka, nego samo rad zadataka.
- Preliminarni rezultati predmetnog testa iz matematike, kao i sveukupnog uspjeha na prijemnom ispitu, objavit će se u srijedu 09.07.2008. godine , oko 15.00 časova, na WEB – u ETF-a, i na oglasnoj ploči na ulazu u fakultet.

Komisija za prijem studenata na I godinu studija na Elektrotehnički fakultet u Sarajevu, školske 2008/2009 godine.

OVAJ DIO POPUNJAVA KOMISIJA

IME I PREZIME KANDIDATA	BROJ BODOVA PO ZADACIMA					UKUPAN BROJ BODOVA
	1	2	3	4	5	

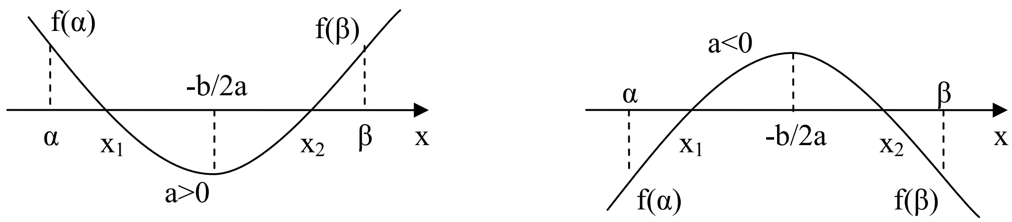
Rješenja:

1. Da bi oba rješenja kvadratne jednačine $\mathbf{ax}^2+\mathbf{bx}+\mathbf{c}=0$ bila u intervalu (α, β), (α<β), potrebno je i dovoljno da budu ispunjeni sljedeći uslovi:

   a. diskriminanta jednačine mora biti nenegativna, $\mathbf{D}\equiv\mathbf{b}^2-4\mathbf{ac}\geq 0$;

   b. tjeme funkcije $\mathbf{f}(\mathbf{x})=\mathbf{ax}^2+\mathbf{bx}+\mathbf{c}$, mora biti između α i β, $\alpha<-\dfrac{\mathbf{b}}{2\mathbf{a}}<\beta$;

   c. proizvodi parametra **a** i vrijednosti funkcija $\mathbf{f}(\mathbf{x})=\mathbf{ax}^2+\mathbf{bx}+\mathbf{c}$ u tačkama α i β, moraju biti pozitivni, $a\bullet f(\alpha)>0$, i $a\bullet f(\beta)>0$, saglasno dijagramima funkcije f(x) za vrijednosti a>0 i a<0.



Vrijednosti funkcije f(x) u datim tačkama su:

$\mathbf{f}(0)=2\mathbf{m}-3;\ \mathbf{f}(5)=17\mathbf{m}-53$

Uvrštavajući odgovarajuće vrijednosti parametara a, b, i c za datu jednačinu, slijedi:

a. $4\mathbf{m}^2-4(\mathbf{m}-2)(2\mathbf{m}-3)=-4(\mathbf{m}-1)(\mathbf{m}-6)\geq 0$;

b. $0<-\dfrac{-2\mathbf{m}}{2(\mathbf{m}-2)}<5$;

c. $(m-2)(2m-3)>0$ i $(m-2)(17m-53)>0$.

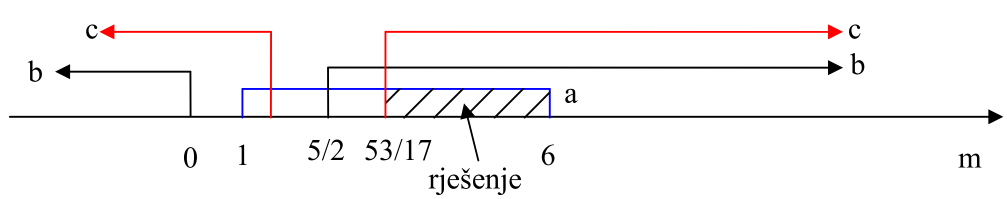
Rješenja odgovarajućih nejednačina su:

a. $1\leq\mathbf{m}\leq 6$;

b. $\mathbf{m}<0$ ili $\mathbf{m}>\dfrac{5}{2}$;

c. ($\mathbf{m}<\dfrac{3}{2}$ ili $\mathbf{m}>2$), i ($\mathbf{m}<2$ ili $\mathbf{m}>\dfrac{53}{17}$).

Zajedničko rješenje je presjek rješenja pod a, b i c, i najjednostavnije ga je naći grafički:



Rješenje zadatka je: $\dfrac{53}{17}<m\leq 6$; odnosno: $m\in(\dfrac{53}{17},6]$.

2. Da bi data jednačina imala rješenja mora biti zadovoljen uslov: $|\cos \mathbf{x}| \le 1$.

   Data jednačina se primjenom trigonometrijskih identiteta transformiše u sljedeću jednačinu:

   $\sin^2 \mathbf{x} + 3\cos \mathbf{x} = \cos 2\mathbf{x} - \cos^2 \mathbf{x};$

   $\sin^2 \mathbf{x} + 3\cos \mathbf{x} - \cos 2\mathbf{x} + \cos^2 \mathbf{x} = 0;$

   $\cos 2\mathbf{x} - 3\cos \mathbf{x} - 1 = 0;$

   $2\cos^2 \mathbf{x} - 3\cos \mathbf{x} - 2 = 0$

   Rješavanjem ove kvadratne jednačine po cosx, slijede rješenja:

   $\cos \mathbf{x}_1 = -\frac{1}{2}; \quad \cos \mathbf{x}_2 = 2.$

   Zbog uslova $|\cos \mathbf{x}| \le 1$, drugo rješenje se odbacuje tako da je validno samo prvo rješenje, gdje se dobije:

   $$\mathbf{x} = \pm\frac{2\pi}{3} + 2\mathbf{k}\pi, \ \mathbf{k} \in \mathbf{Z}$$

3. Da bi data jednačina imala rješenja moraju biti zadovoljeni sljedeći uslovi:

   a. $\mathbf{x}>0$; (oblast definisanosti funkcije logx);
   b. $\log \mathbf{x}>0$, odnosno $\mathbf{x}>1$; (oblast definisanosti funkcije log(logx));
   c. $\log \mathbf{x}^3-2>0 \Rightarrow 3\log x>2$, odnosno $\mathbf{x}>\sqrt[3]{100}$; (oblast definisanosti funkcije $\log(\log x^3-2)$);

   Rješavanjem date nejednačine slijedi:

   $\log(\log \mathbf{x}) + \log(\log \mathbf{x}^3 - 2)<0 \Rightarrow$

   $\log(\log \mathbf{x} \bullet (3\log \mathbf{x} - 2))<0 \Rightarrow$

   $\log \mathbf{x} \bullet (3\log \mathbf{x} - 2)<1 \Rightarrow$

   $3\log^2 \mathbf{x} - 2\log \mathbf{x} - 1<0$

   Smjenom: logx=t , dobije se:

   $3\mathbf{t}^2 - 2\mathbf{t} - 1<0$

   Dobijena kvadratna nejednačina ima rješenje: $-\frac{1}{3}<t<1$, odnosno,

   $-\frac{1}{3}<\log x<1 \ \Rightarrow \ \frac{1}{\sqrt[3]{10}}<x<10$

   Uzimajući u obzir navedene uslove pod a, b i c, zbog oblasti definisanosti funkcija, rješenje date nejednačine je:

   $\sqrt[3]{100}<x<10$

4. Stavljajući da je $z=x+iy, (x,y \in R)$, i kvadriranjem datih izraza slijedi:

   $9|\mathbf{x} - 12 + \mathbf{iy}|^2 = 25|-x-iy+8i|^2$, $|\mathbf{x} + \mathbf{iy} - 8|^2 = |\mathbf{x} + \mathbf{iy} - 4|^2$, odnosno:

$= 9\left[(x\text{-}12)^2 + \mathbf{y}^2\right] = 25\left[x^2 + (8-\mathbf{y})^2\right], \ \left[(x\text{-}8)^2 + \mathbf{y}^2\right] = \left[(x\text{-}4)^2 + \mathbf{y}^2\right]$

Rješavanjem druge jednačine slijedi da je: $x=6$, i uvrštavanjem u prvu jednačinu slijedi kvadratna jednačina:
$y^2 - 25\mathbf{y} + 136 = 0$, čija su rješenja:
$y_1 = 8, \ \mathbf{y}_2 = 17$

Na osnovu toga su rješenja zadatka:

$z_1=6+8i$
$z_2 = 6 + 17i$

5. Neka su koordinate tačke C, x_C i y_C.

Kako tačka C leži na pravcu *p*, to zadovoljava relaciju:
$\mathbf{y_C} = 2\mathbf{x_C} + 2$ (*)

Površina trougla datog koordinatama tačaka (x_1, z_1), (x_2, y_2) i (x_3, y_3) data je izrazom:
$$\mathbf{P} = \left|\frac{1}{2}\left[\mathbf{x}_1(\mathbf{y}_2 - \mathbf{y}_3) + \mathbf{x}_2(\mathbf{y}_3 - \mathbf{y}_1) + \mathbf{x}_3(\mathbf{y}_1 - \mathbf{y}_2)\right]\right|$$

Uvrštavanjem vrijednosti koordinata datih tačaka slijedi:

$$2\mathbf{P} = \left|\left[-1\bullet(3-\mathbf{y_C}) - 2\bullet(\mathbf{y_C}+2) + \mathbf{x_C}(-2-3)\right]\right|, \Rightarrow$$
$$16 = \left|-7 - \mathbf{y_C} - 5\mathbf{x_C}\right|$$

Iz posljednje relacije i relacije (*) slijede dva sistema jednačina:

a.
$\mathbf{y_C} = 2\mathbf{x_C} + 2$
$16 = -7 - \mathbf{y_C} - 5\mathbf{x_C}$
Rješenje ovog sistema je: $\mathbf{x}_{\mathbf{C}1} = -\dfrac{25}{7}, \ \mathbf{y}_{\mathbf{C}1} = -\dfrac{36}{7}$.

b.
$\mathbf{y_C} = 2\mathbf{x_C} + 2$
$16 = -(-7 - \mathbf{y_C} - 5\mathbf{x_C})$
Rješenje ovog sistema je: $\mathbf{x}_{\mathbf{C}2} = 1, \ \mathbf{y}_{\mathbf{C}2} = 4$.

Rješenje zadatka je: $\mathbf{C}_1(-\dfrac{25}{7}, -\dfrac{36}{7}); \ \mathbf{C}_2(1, 4)$