ŠIFRA KANDIDATA _ _ _ _ _

Zadatak 1. Za koje vrijednosti parametra $m \in \mathbb{R}$ su rješenja kvadratne jednačine $(m-1)x^2 - 2mx + 3 = 0$ oba iz skupa $\mathbb{R}$ i suprotnog znaka?

a) $m > 3$ b) $m < 3$ c) $m < 1$ d) $m = 2$ $i$ $m = 4$

**Rješenje:**

Da bi rješenja kvadratne jednačine bila suprotnog znaka njihov proizvod mora biti negativan. Vietovo pravilo za ovaj slučaj glasi $x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a} = \frac{3}{m-1} < 0$ odnosno za $m < 1$ je zadovoljen uslov da rješenja kvadratne jednačine budu suprotnog znaka.

Da bi rješenja kvadratne jednačine bila realna njena diskriminanta D mora biti veća od nule. Kako je $\frac{c}{a} < 0$ to mora vrijediti i $c \cdot a < 0$, pa je uslov $D = b^2 - 4ac > 0$ svakako zadovoljen.

Tačan odgovor je c.

Zadatak 2. Površina jednakostraničnog trougla stranice ***a*** iznosi 6. Površina kvadrata čija je stranica takođe ***a*** je:

a) $8\sqrt{3}$ b) $\frac{12}{\sqrt{3}}$ c) $\frac{8}{\sqrt{3}}$ d) $12\sqrt{3}$

**Rješenje:**

Ako je ***a*** stranica jednakostranničnog trougla, onda je njegova površina:

$$P_\Delta = \frac{\sqrt{3}}{4}a^2 = 6\,.$$

Površina kvadrata stranice ***a*** iznosi:

.

$$P_\square = a^2 = \frac{4P_\Delta}{\sqrt{3}} = \frac{24}{\sqrt{3}} = 8\sqrt{3}$$

Tačan odgovor je a.

Zadatak 3. Kružnica zadana jednačinom $(x-4)^2+(y-1)^2=1$ i kružnica zadana jednačinom $x^2+y^2-2x-2y-2=0$ se dodiruju samo u jednoj tački. Kolika je udaljenost između centara tih kružnica?

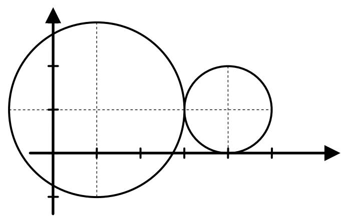
a) 3 b) 6 c) $2\sqrt{10}$ d) $4\sqrt{2}$

**Rješenje:**

Udaljenost centara za dvije kružnice koje se dodiruju izvana u samo jednoj tački jednaka je zbiru njihovih poluprečnika. Prva kružnica ima poluprečnik $r_1=1$.

Jednačina druge kružnice se može napisati u obliku $x^2+y^2-2x-2y+2-4=0$ odnosno u obliku $(x-1)^2+(y-1)^2=2^2$, odakle se vidi da je njen poluprečnik $r_2=2$. Tražena udaljenost je $r_1+r_2=1+2=3$. Tačan odgovor je a.

Zadatak je moguće riješiti i grafički ukoliko se skicira slika zadanog problema.



Zadatak 4. Skup svih rješenja nejednačine $\sqrt{4x+10}<2x+1$ je:

a) $\left(-\frac{1}{2},+\infty\right)$ b) $\left(\frac{3}{2},+\infty\right)$ c) $\left(-\frac{5}{2},+\infty\right)$ d) $\left(-\frac{3}{2},\frac{3}{2}\right)$

**Rješenje:**

Zadana nejednačina je ekvivalentna sistemu nejednačina:

$4x+10\geq 0$

$2x+1>0$

$4x+10<(2x+1)^2$

Rješenja ovih nejednačina su $x\in\left[-\frac{5}{2},+\infty\right)$, $x\in\left(-\frac{1}{2},+\infty\right)$, $x\in\left(-\infty,-\frac{3}{2}\right)\cup\left(\frac{3}{2},+\infty\right)$, respektivno.

Traženi skup je presjek prethodnih skupova rješenja i dobije se da je to interval $\left(\frac{3}{2},+\infty\right)$.

Tačan odgovor je b.

Zadatak 5. Vrijednost izraza $\left|\frac{1+z}{1-z}\right|$, za $z=3i$, gdje je $i$ imaginarna jedinica, je:

a) 5 b) 2 c) 1 d) $\sqrt{5}$

**Rješenje:**

Nakon korištenja pravila za apsolutnu vrijednost količnika, izraz $\left|\frac{1+z}{1-z}\right|$ postaje $\left|\frac{1+z}{1-z}\right| = \frac{|1+z|}{|1-z|} = \frac{|1+3i|}{|1-3i|} = \frac{\sqrt{1+3^2}}{\sqrt{1+(-3)^2}} = 1$.

Tačan odgovor je c.

Zadatak 6. Ako je izraz $\frac{z-1}{z+1}$ čisto imaginaran za sve kompleksne brojeve $z$, $z \neq -1$, odrediti $|z|$.

a) $|z|=0$ b) $|z|=\pm 1$ c) $|z|=\frac{1}{2}$ d) $|z|=1$

**Rješenje:**

Modul kompleksnog broja $z=x+i\cdot y$, čiji su realni i imaginarni dio $x$ i $y$, respektivno, definira se formulom $|z|=\sqrt{x^2+y^2}$. Ako se $z=x+i\cdot y$ uvrsti u zadani izraz, dobije se da je:

$$\frac{z-1}{z+1} = \frac{x+iy-1}{x+iy+1} = \frac{(x-1)+i\cdot y}{(x+1)+i\cdot y}\cdot\frac{(x+1)-iy}{(x+1)-iy} =$$
$$= \frac{(x^2-1)+y^2}{(x+1)^2+y^2} + i\cdot\frac{2y}{(x+1)^2+y^2}$$

Izjednačavajući realni dio dobijenog izraza sa nulom, dobije se

$$x^2-1+y^2=0 \Leftrightarrow x^2+y^2=1 \Leftrightarrow |z|=1.$$

Tačan odgovor je d.

Zadatak 7. U skupu realnih brojeva izraz $\left(\frac{a}{a+b}-\frac{a}{b}\right):\frac{ab}{a+b}$, ako je $a\neq 0, b\neq 0, a\neq -b$, jednak je izrazu:

a) $\frac{a}{b^2}$ b) $-\frac{a^2}{b^2}$ c) $-\frac{a^2}{b}$ d) $-\frac{a}{b^2}$

**Rješenje:**

Zadati izraz se može napisati u obliku:

$$\frac{ab-a^2-ab}{(a+b)\cdot b}:\frac{ab}{a+b}=\frac{-a^2}{(a+b)\cdot b}:\frac{ab}{a+b}=\frac{-a^2}{(a+b)\cdot b}\cdot\frac{a+b}{ab}=\frac{-a^2}{b}\cdot\frac{1}{ab}=-\frac{a}{b^2}$$

Tačan odgovor je d.

Zadatak 8. Rješenja jednačine $\sin x+\cos x=1$ na razmaku $[0,2\pi)$ su:

a) $x_1=0 \;\; x_2=\frac{\pi}{2}$ b) $x=\frac{3\pi}{2}$ c) $x_1=\pi$ d) $x_1=\pi \;\; x_2=\frac{3\pi}{2}$

**Rješenje:**

Množeći lijevu i desnu stranu zadate jednačine sa $\frac{\sqrt{2}}{2}$, dobije se $\frac{\sqrt{2}}{2}\sin x+\frac{\sqrt{2}}{2}\cos x=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Posljednja jednačina se može napisati u obliku: $\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}$,

odakle slijedi da je: $x+\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{4}+2k\pi \vee x+\frac{\pi}{4}=\frac{3\pi}{4}+2m\pi,\ (k,m\in\mathbb{Z})$,

Na osnovu toga je opšte rješenje zadate jednačine dato sa: $x=2k\pi \vee x=\frac{\pi}{2}+2m\pi$

Od svih ovih rješenja intervalu $[0,2\pi)$ pripadaju samo: $x_1=0$ i $x_2=\frac{\pi}{2}$.

Tačan odgovor je a.

Zadatak 9. Neka su rješenja jednačine $\log_3(4-x)+\log_3(x-1)=\log_3 2$ realni brojevi $x_1$ i $x_2$, tada je vrijednost izraza $|x_1-x_2|$ jednaka:

a) 0 b) 1 c) 2 d) $-2$

**Rješenje:**

Domen zadane jednačine je skup: $D=\{x\in\mathbb{R}: 4-x>0 \wedge x-1>0\}=\{x\in\mathbb{R}: 1<x<4\}$.

Zadata jednačina je ekvivalentna jednačini $\log_3((4-x)\cdot(x-1))=\log_3 2$,

koja se svodi na kvadratnu jednačinu $(4-x)\cdot(x-1)=2$,

čija su rješenja $x_1=2$ i $x_2=3$.

Vrijednost izraza $|x_1-x_2|$ je zbog toga jednaka 1.

Tačan odgovor je b.

Zadatak 10. Jednačina $4^x=2^{\frac{x+1}{x}}$ ima dva rješenja, $x_1$ *i* $x_2$. Suma $x_1^2+x_2^2$ iznosi:

a) $\frac{1}{2}$ b) $\frac{1}{4}$ c) $\frac{9}{4}$ d) $\frac{5}{4}$

**Rješenje:**

Definiciono područje za datu jednačinu je za $\forall x\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$.

Jednačina se na svom domenu može ekvivalentirati na sljedeći način:

$$2^{2x}=2^{\frac{x+1}{x}} \Leftrightarrow 2x=\frac{x+1}{x} \Leftrightarrow 2x^2-x-1=0 \Rightarrow x_{1,2}=\frac{1\pm\sqrt{1+8}}{4} \Rightarrow x_1=-\frac{1}{2},\quad x_2=1.$$

Tražena suma iznosi $x_1^2+x_2^2=\frac{1}{4}+1=\frac{5}{4}$.

Tačan odgovor je d.

Zadatak 11. Ako je $\cos\alpha = \frac{3}{5}$ i $\alpha \in [0, \pi]$, onda je $\sin\alpha$ jednako:

a) $\frac{4}{5}$ b) $-\frac{4}{5}$ c) $\pm\frac{4}{5}$ d) $\frac{3}{5}$

**Rješenje:**

$$\cos\alpha = \frac{3}{5} \ (0 \le \alpha \le \pi) \Rightarrow \sin\alpha = \sqrt{1-\cos^2\alpha} = \frac{4}{5}$$

Tačan odgovor je a.

Zadatak 12. U nekom aritmetičkom nizu prvi član je 4, a osmi član 25. Koliko iznosi suma trećeg i petog člana tog niza?

a)29 b)26 c)36 d)23

**Rješenje:**

Za *n*-ti član aritmetičkog niza vrijedi: $a_n = a_1 + (n-1)\cdot d$

gdje je $a_1$ prvi član niza, a $d$ je diferencija niza.

Na osnovu uslova iz postavke zadatka je $a_1 = 4$ i $a_8 = 4 + (8-1)d = 25 \Rightarrow d = 3$

Tražena suma trećeg i petog člana niza iznosi 26.

Tačan odgovor je b.

Zadatak 13. Oznaka $a_{(b)}$ je oznaka broja $a$ izraženog u brojnom sistemu baze $b$. Suma $344_{(7)} + 266_{(7)}$ jednaka je broju:

a) $2300_{(5)}$ b) $101000100_{(2)}$ c) $426_{(10)}$ d) $643_{(7)}$

**Rješenje:**

Data suma se može direktno odrediti u brojnom sistemu baze 7 i iznosi $643_{(7)}$.

Prebacivanjem u sistem sa bazom 5 rješenje je $2300_{(5)}$

Zadatak se može riješiti i prebacivanjem u brojni sistem baze 10, sabiranjem i provjeravanjem tog rezultata u brojnim sistemima baza 2 i 5 (zbog ponuđenih odgovora).

$$344_{(7)} + 266_{(7)} = \left(3 \cdot 7^2 + 4 \cdot 7 + 4\right) + \left(2 \cdot 7^2 + 6 \cdot 7 + 6\right) = 325_{(10)} = 643_{(7)} = 2300_{(5)}$$

Tačni odgovori su a i d. Priznaje se barem jedan tačan odgovor.

Zadatak 14. Skup svih rješenja logaritamske nejednačine $\log_{\frac{1}{3}}(x+1) - \log_{\frac{1}{3}}(x-2) < 2$ u skupu realnih brojeva je:

a) $\left(-\infty, -\frac{11}{8}\right) \cup (2, +\infty)$ b) $\left(-\frac{11}{8}, 2\right)$ c) $(2, +\infty)$ d) $\left(-\infty, -\frac{11}{8}\right)$

**Rješenje:**

Domen zadane nejednačine je skup $D = \{x \in \mathbb{R} : x+1 > 0 \wedge x-2 > 0\} = \{x \in \mathbb{R} : x > 2\}$.

Zadata nejednačina je ekvivalentna nejednačini: $\log_{\frac{1}{3}}\left(\frac{x+1}{x-2}\right) < \log_{\frac{1}{3}}\left(\frac{1}{3}\right)^2$.

Vodeći računa da je baza logaritma manja od 1, prethodna nejednačina se svodi na nejednačinu:

$$\frac{x+1}{x-2} > \frac{1}{9} \Leftrightarrow \frac{x+1}{x-2} - \frac{1}{9} > 0 \Leftrightarrow \frac{8x+11}{9(x-2)} > 0.$$

Tabelarno se vrlo lako dobije da je rješenje ove nejednačine $x \in \left(-\infty, -\frac{11}{8}\right) \cup (2, +\infty)$. Konačno rješenje se dobije kao presjek dobijenog skupa i skupa $D$, pa je traženi skup rješenja $(2, +\infty)$.

Tačan odgovor je c.

Zadatak 15. Jednačina prave ***p*** koja prolazi kroz tačku A(3, -7) i na koordinatnim osama odsijeca jednake odsječke je:

a) $y = -x - 4$ b) $y = x - 4$ c) $y = -x + 4$ d) $y = x + 4$

**Rješenje:**

Za rješavanje navedenog zadatka najpovoljnije je koristi se segmentnim oblikom prave u ravni:

$$p: \ \frac{x}{m} + \frac{y}{n} = 1$$

pri čemu su $m$ i $n$ odsječci na koordinatim osama Decartesovog pravouglog koordinatnog sistema. Iz uslova zadatka vrijedi da je $m = n$ i $\frac{3}{m} + \frac{-7}{n} = 1$ .

Rješavanjem se dobije da je $m = n = -4$, pa je tražena prava $p$: $y = -x - 4$.

Tačan odgovor je a.

Zadatak 16. Neka knjiga ima određenu početnu cijenu. Ona prvo poskupi za 50 %, pa zatim pojeftini za 50 %. Tako dobivena cijena knjige je:

a) ista kao početna b) 25 % viša u odnosu na početnu cijenu

c) 25% niža u odnosu na početnu cijenu d) 50% niža u odnosu na početnu cijenu

**Rješenje:**

Ako se početna cijena knjige označi sa $x$, nakon poskupljenja od 50%, knjiga košta $x + \frac{50}{100}x = 1,5 \cdot x$.

Nakon pojeftinjenja od 50%, knjiga košta $1,5x - \frac{50}{100} \cdot 1,5x = 0,75 \cdot x = \frac{75}{100}x$ .

Dakle knjiga je sada 25% jeftinija u odnosu na početnu cijenu.

Tačan odgovor je c.

Zadatak 17. Kvadratni trinom $2x^2+x-3$ može se napisati u sljedećem obliku.

a) $(2x+3)(x+1)$ b) $(2x+3)(x-1)$

c) $(2x-3)(x-1)$ d) $(2x-3)(x+1)$

**Rješenje:**

Sređivanjem datog izraza se dobije:

$2x^2+x-3=2x^2+3x-2x-3=x(2x+3)-(2x+3)=(2x+3)(x-1)$.

Tačan odgovor je b.

Zadatak 18. Odrediti sve vrijednosti $\alpha$ iz skupa $[0,2\pi)$ za koje je nejednačina:

$$\left(\sin\alpha+\frac{1}{2}\right)x^2-\left(2\sin\alpha-3\right)x+1>0,$$ zadovoljena za svaki realni broj $x$.

a) $\alpha\in\varnothing$ b) $\alpha\in\left[0,\frac{7\pi}{6}\right]\cup\left[\frac{11\pi}{6},2\pi\right)$ c) $\alpha\in\left[0,2\pi\right)$ d) $\alpha\in\left(\frac{\pi}{6},\frac{5\pi}{6}\right)$

**Rješenje:**

Zadana nejednačina je kvadratna, oblika $ax^2+bx+c>0,\ (a,b,c)\in\mathbb{R}$ i biće zadovoljena za svaki realni broj $x$ kada je $a>0$ i $D=b^2-4ac<0$, gdje je $a=\sin\alpha+\frac{1}{2}$, $b=-\left(2\sin\alpha-3\right)$ i $c=1$.

Prvi uslov se svodi na $a>0\Leftrightarrow\sin\alpha+\frac{1}{2}>0\Leftrightarrow\sin\alpha>-\frac{1}{2}\Rightarrow\alpha\in\left[0,\frac{7\pi}{6}\right)\cup\left(\frac{11\pi}{6},2\pi\right]$.

Drugi uslov se svodi na:

$b^2-4ac<0\Leftrightarrow 4\sin^2\alpha-16\sin\alpha+7<0\Leftrightarrow 4\sin^2\alpha-14\sin\alpha-2\sin\alpha+7<0$,

odnosno $2\sin\alpha\left(2\sin\alpha-7\right)-\left(2\sin\alpha-7\right)<0\Leftrightarrow\left(2\sin\alpha-1\right)\left(2\sin\alpha-7\right)<0$. S obzirom da je $\sin\alpha\le 1$ za svaki realni $\alpha$, to je $2\sin\alpha-7<0$ za svaki realni $\alpha$, pa je $2\sin\alpha-1>0$ što je na intervalu $\left[0,2\pi\right)$ ispunjeno za $\alpha\in\left(\frac{\pi}{6},\frac{5\pi}{6}\right)$.

Tačan odgovor je d.

Zadatak 19. Ostatak pri dijeljenju polinoma $P(x)=4x^4-2x^3+2x+1$ binomom $(x-1)$ je:

a) 5 b) 0 c) 1 d) -1

**Rješenje:**

Za rješavanje ovog zadatka najpogodnije je iskoristiti Bezuov stav: Ostatak dijeljenja polinoma $P(x)$ sa $x-x_0$ jednak je vrijednosti tog polinoma za $x=x_0$. Pa je:

$r(x)=P(1)=4\cdot1^4-2\cdot1^3+2\cdot1+1=5$.

Tačan odgovor je a.

Zadatak 20. Skup svih rješenja nejednačine $|x+1|>2|x-2|$ je dat sa:

a) $1<x<5$ b) $-1<x<5$ c) $-2<x<5$ d) $2<x<5$

**Rješenje:**

Prema sljedećoj tabeli moguće je rastaviti rješavanje zadane nejednačine na tri dijela:

1. Za $x\leq-1$ rješava se nejednačina $-(x+1)>-2(x-2)$ iz koje se dobije $x>5$ što ne zadovoljava uslov $x\leq-1$.
2. Za $x\in[-1,2]$ rješava se nejednačina $x+1>-2(x-2)$ iz koje se dobije $x>1$. Presjek postavljenog i dobivenog uslova daje rješenje u ovom slučaju $x\in(1,2]$.
3. Za $x\geq2$ rješava se nejednačina $x+1>2(x-2)$ iz koje se dobije $x<5$. Presjek postavljenog i dobivenog uslova daje rješenje u ovom slučaju $x\in[2,5)$.

Rješenje nejednačine je unija dobivenih rješenja pod 1, 2 i 3 i to je $x\in(1,5)$.

Tačan odgovor je a.