ŠIFRA KANDIDATA _ _ _ _ _

Zadatak 1. Proizvod rješenja jednačine $x^2 - 5x = -6$ je:

a) 0 b) 6 c) -30 d) 1

Rješenje:

Jednačinu je moguće napisati u obliku
$x^2 - 5x + 6 = 0.$
Na osnovu Vietovih formula, proizvod rješenja kvadratne jednačine
$ax^2 + bx + c = 0$,
gdje su a, b i c realne konstante je $x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$.
Upoređujući prethodne jednačine lako se zaključi da je $a = 1$ i $c = 6$, pa je proizvod rješenja jednak $\frac{c}{a} = 6$. Tačan odgovor je b.

Zadatak 2. Ostatak pri dijeljenju polinoma $P(x) = x^5 + 2x^4 + x^2 - 12x + 1$ polinomom $Q(x) = x - 1$ je:
a) 2 b) -7 c) 16 d) 0

Rješenje:
Po Bezuovom stavu ostatak pri dijeljenju polinoma $P(x)$ polinomom oblika $(x - a)$ je vrijednost $P(a)$. Primjenom tog stava zaključuje se da ostatak pri dijeljenju $P(x)$ sa $Q(x) = x - 1$ iznosi
$P(1) = 1 \cdot (1)^5 + 2 \cdot (1)^4 + (1)^2 - 12 \cdot (1) + 1 = 1 + 2 + 1 - 12 + 1 = -7$.
Tačan odgovor je b.

Zadatak 3. Sve vrijednosti realnog parametra n za koje prava $p: y = x + n$ predstavlja tangentu kružnice $K: x^2 + y^2 = 1$ su:

a) 1 b) 0 c) ± 5 d) $\pm\sqrt{2}$

Rješenje:

Da bi prava bila tangenta kružnice potreban i dovoljan uslov jeste da sistem jednačina

$x^2 + y^2 = 1$

$y = x + n,$

ima samo jedno rješenje.

Uvrštavajući drugu jednačinu u prvu, dobije se

$x^2 + (x+n)^2 = 1.$

Posljednja jednačina se može svesti na oblik

$2x^2 + 2nx + n^2 - 1 = 0.$

Početni sistem jednačina će imati samo jedno rješenje, tj. prava p će biti tangenta kružnice K ako ova kvadratna jednačina ima samo jedno rješenje, dakle ako joj je diskriminanta jednaka nuli. Iz tog uslova dobije se

$D = 4n^2 - 8(n^2 - 1) = 0 \Leftrightarrow -4n^2 + 8 = 0,$

$n^2 = 2 \Rightarrow n = \pm\sqrt{2}.$

Tačan odgovor je d.

Zadatak 4. Skup svih rješenja nejednačine $\dfrac{6x}{(x-1)(x-2)} \geq 0$ je:

a) $(-\infty, +\infty)$ b) $[0, +\infty)$ c) $(-\infty, 0] \cup (2, +\infty)$ d) $[0,1) \cup (2, +\infty)$

Rješenje:

Definiciono područje nejednačine $\dfrac{6x}{(x-1)(x-2)} \geq 0$ je $x \in (-\infty, 1) \cup (1,2) \cup (2, +\infty)$ i iz tabele se može zaključiti da je skup rješenja $x \in [0,1) \cup (2, +\infty)$.

	$-\infty \quad 0 \quad 1 \quad 2 \quad +\infty$			
$6x$	-	+	+	+
$x-1$	-	-	+	+
$x-2$	-	-	-	+
$\dfrac{6x}{(x-1)(x-2)}$	-	+	-	+

Tačan odgovor je d.

Zadatak 5. Vrijednost izraza $\left|\frac{1-z}{1+z}\right|$, za $z=-i$, gdje je *i* imaginarna jedinica, je:

a) 5 b) 2 c) 1 d) $\frac{\sqrt{5}}{5}$

Rješenje:

Korištenjem pravila za modul količnika izraz $\left|\frac{1-z}{1+z}\right|$ postaje $\left|\frac{1-z}{1+z}\right|=\frac{|1-z|}{|1+z|}=\frac{|1+i|}{|1-i|}=\frac{\sqrt{1+1^2}}{\sqrt{1+(-1)^2}}=1$. Tačan odgovor je c.

Zadatak 6. Izračunavanjem $(1-i)^2$, gdje je i imaginarna jedinica se dobije:

a) $2+2\cdot i$ b) 1 c) -1 d) $-2\cdot i$

Rješenje:

Izračunavanjem slijedi:

$$(1-i)^2=1-2\cdot i+i^2=1-2\cdot i-1=-2\cdot i$$

Tačan odgovor je d.

Zadatak 7. Pojednostavljenjem izraza $\left(\frac{a}{a+b}-\frac{a}{b}\right):\frac{ab}{a+b}$ u skupu realnih brojeva, ako je $a,b\neq 0,\ a\neq -b$ dobija se:

a) $\frac{a}{b}$ b) $\frac{b}{a}$ c) 1 d) $-\frac{a}{b^2}$

Rješenje:

Zadati izraz se može napisati u obliku:

$$\frac{ab-a^2-ab}{(a+b)\cdot b}:\frac{ab}{a+b}=\frac{-a^2}{(a+b)\cdot b}:\frac{ab}{a+b}=\frac{-a^2}{(a+b)\cdot b}\cdot\frac{a+b}{ab}=$$
$$=\frac{-a^2}{b}\cdot\frac{1}{ab}=-\frac{a}{b^2}$$

Tačan odgovor je d.

Zadatak 8. Ako je $\cos\alpha=\frac{3}{5}$ i $\alpha\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$, onda je $\sin\alpha$ jednako:

a) $\frac{4}{5}$ b) $-\frac{1}{5}$ c) $\frac{2}{5}$ d) $-\frac{3}{5}$

Rješenje:

Polazeći od poznatog trigonometrijskog identiteta: $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$, izračunavanjem slijedi:

$$\sin^2\alpha=1-\cos^2\alpha\Rightarrow\sin\alpha=\pm\sqrt{1-\cos^2\alpha}=\pm\sqrt{1-\left(\frac{3}{5}\right)^2}=\pm\sqrt{\frac{16}{25}}=\pm\frac{4}{5}.$$

Pošto je $\sin\alpha\geq 0$, za svako $\alpha\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$, slijedi da je $\sin\alpha=\frac{4}{5}$.

Tačan odgovor je a.

Zadatak 9. Rješenja logaritamske jednačine $\log_5^2 x - \log_5 x - 6 = 0$ su x_1 i x_2. Proizvod rješenja $x_1 \cdot x_2$ iznosi:

a) 5 b) 6 c) 1 d) 25

Rješenje:

Domen date jednačine je skup $(0,+\infty)$. Jednačina se svodi na kvadratnu, uz smjenu $\log_5 x = t$. Izračunavanjem slijedi:

$$t^2 - t - 6 = 0 \Rightarrow t_1 = -2 \vee t_2 = 3 .$$

Dalje je:

$$\log_5 x = -2 \quad \vee \quad \log_5 x = 3$$
$$x_1 = \frac{1}{25} \qquad x_2 = 125$$

Očito je proizvod rješenja jednak 5.

Tačan odgovor je a.

Zadatak 10. Jednačina $2^{2x} = 2^{\frac{x+1}{x}}$ ima dva rješenja, x_1 *i* x_2. Suma $x_1^2 + x_2^2$ iznosi:

a) $\frac{1}{2}$ b) $-\frac{1}{4}$ c) $-\frac{9}{4}$ d) $\frac{5}{4}$

Rješenje:

Domen date jednačine je skup realnih brojeva isključujući 0.. Jednačina se može ekvivalentirati na sljedeći način:

$$2^{2x} = 2^{\frac{x+1}{x}}$$
$$2x = \frac{x+1}{x}$$
$$2x^2 - x - 1 = 0 \qquad \Rightarrow x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1+8}}{4}$$

$x_1 = -\frac{1}{2}$ i $x_2 = 1$. Tražena suma iznosi $x_1^2 + x_2^2 = \frac{1}{4} + 1 = \frac{5}{4}$.

Tačan odgovor je d.

Zadatak 11. Neka je $x \in [-\pi, \pi]$. Rješenje nejednačine $\sin x - \sqrt{3}\cos x < 0$ je:

a) $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ b) $x \in \left(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}\right)$ c) $x \in \left(-\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}\right)$ d) $x \in \left(-\frac{2\pi}{3}, \frac{\pi}{3}\right)$

Rješenje:

Nejednačina transformacijom postaje

$$\sin x \cdot \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\cos(x) < 0$$
$$\sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right) < 0 .$$

Rješenje ove nejednačine je

$$-\pi + 2k\pi < x - \frac{\pi}{3} < 0 + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$
$$-\frac{2\pi}{3} + 2k\pi < x < \frac{\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} ,$$

Uzimajući u obzir da je $x \in [-\pi, \pi]$, slijedi da je rješenje $x \in \left(-\frac{2\pi}{3}, \frac{\pi}{3}\right)$.

Tačan odgovor je d.

Zadatak 12. U nogometnoj lizi učestvuje 6 timova. Svaki tim igra sa ostalima po jednu utakmicu. Ukupan broj odigranih utakmica je:

a) 100 b) 24 c) 15 d) 10

Rješenje:

Svaki tim je odigrao N-1 utakmicu sa ostalim timovima (ako je N broj timova). Ukupan broj odigranih utakmica je $\frac{N(N-1)}{2} = \frac{6 \cdot 5}{2} = 15$, budući da ne treba duplo računati utakmice koje odigraju dva tima međusobno.

Tačan odgovor je c.

Zadatak 13. Izražavanjem broja 19 u binarnom brojnom sistemu dobija se:

a) 10011 b) 10110 c) 11000 d) 10100

Rješenje:

Broj 19 zapisan u dekadskom sistemu može se predstaviti preko zbira potencija broja 2, kojeg uzimamo kao bazu b sistema u koji želimo pretvoriti broj.

Dalje je:

$$19 = 1\cdot 2^4 + 0\cdot 2^3 + 0\cdot 2^2 + 1\cdot 2^1 + 1\cdot 2^0$$

Stoga konačno:

$$(19)_{10} = (10011)_2$$

Tačan odgovor je a.

Zadatak 14. Rješenje nejednačine $\log_2\left(x^2-3x+4\right)<\log_2 2$ je skup:

a) $(1,2)$ b) $(0,2)$ c) $(-\infty,-1)\cup(2,+\infty)$ d) $(-\infty,1]\cup(2,+\infty)$

Rješenje:

Domen date nejednačine je skup $\left\{x\in\mathbb{R}: x^2-3x+4>0\right\}=\mathbb{R}$. Data nejednačina je ekvivalentna nejednačinama

$x^2-3x+4<2,$

$x^2-3x+2<0,$

$(x-1)\cdot(x-2)<0.$

Rješenje dobivene kvadratne nejednačine je skup $(1,2)$.

Tačan odgovor je a.

Zadatak 15. Jednačina kružnice koncentrične sa $(x+3)^2+(y+1)^2=5$, a koja prolazi kroz tačku T(1, -4) je:

a) $K:(x+3)^2+(y+1)^2=25$

b) $K:(x-3)^2+(y-1)^2=16$

c) $K:(x+3)^2+(y+1)^2=16$

d) $K:(x-3)^2+(y-1)^2=25$

Rješenje:

Iz jednačine date kružnice se može izračunati da je:

$(x+3)^2+(y+1)^2=5 \Rightarrow C(-3,-1),\ r=\sqrt{5}$.

Tražena kružnica je

$K:(x+3)^2+(y+1)^2=R^2,\ T(1,-4)\in K \Rightarrow (1+3)^2+(-4+1)^2=R^2 \Rightarrow R=5$

Tačan odgovor je a.

Zadatak 16. Računar je snižen za 20%. Koliko mora iznositi poskupljenje u procentima da bi se vratila prvobitna cijena računara?

a) 20% b) 25% c)30% d)50%

Rješenje:

Pretpostavit će se da je prvobitna cijena računara *x*. Nakon sniženja taj računar ima vrijednost

$$x-20\%\cdot x = x-\frac{20}{100}x = x-0{,}2x=0{,}8x.$$

Potrebno je vratiti prvobitnu cijenu računara uz poskupljenje od $a(\%)$. Zbog toga je

$$0{,}8x+a(\%)\cdot 0{,}8x=x,$$

$$0{,}8+\frac{a}{100}0{,}8=1,$$

$$a=25.$$

Tačan odgovor je b.

Zadatak 17. Dati su pravac p1: $y-x-1=0$ i tačka $N(1,2)$. Jednačina prave koja sadrži tačku N, a koja je okomita na dati pravac p1 je:

a) $x-y+1=0$ b) $y-x+1=0$ c) $x+y+1=0$ d) $x+y-3=0$

Rješenje:

Koeficijent pravca prave koja je okomita na pravac p1 je: $k_2=-\frac{1}{k_1}=-1$.

Jednačina prave koja je okomita na pravac p1 i sadrži tačku N je $y-y_N=k_2(x-x_N)$ pa se uvrštavanjem dobije $y=-x+3$.

Tačan odgovor je d.

Zadatak 18. Sve vrijednosti realnog parametra *k*, tako da jednačina $kx^2+(k+1)x+k-1=0$ ima dva realna i različita rješenja od kojih tačno jedno pripada intervalu $(-1,0)$, pripadaju sljedećem intervalu:

a) $\forall k\in(1,2)$ b) $\forall k\in(0,1)$ c) $\forall k\in(0,3)$ d) $\forall k\in(2,3)$

Rješenje:

Da bi kvadratna funkcija $f(x)=kx^2+(k+1)x+k-1$ imala dva realna i različita rješenja od kojih tačno jedno pripada intervalu $(-1,0)$ potrebno je i dovoljno da vrijedi da je

$f(-1)\cdot f(0)<0$.

Uslov dat prethodnom relacijom se svodi na

$(k-2)\cdot(k-1)<0$.

Lako se dobije da je rješenje posljednje nejednačine dato sa $\forall k\in(1,2)$, što je i rješenje zadatka. Tačan odgovor je a.

Zadatak 19. Ako je zbir trećeg i petog člana aritmetičkog niza 22, a šesti član je 17, zbir drugog i četvrtog člana je:

a)14 b) 12 c) 10 d) 16

Rješenje:

Za n-ti član aritmetičkog niza vrijedi

$$a_n = a_1 + (n-1) \cdot d$$

gdje je a_1 prvi član niza, a d je diferencija niza.

Na osnovu uslova iz postavke zadatka je

$$a_3 + a_5 = a_1 + 2d + a_1 + 4d = 2a_1 + 6d = 22,$$
$$a_1 + 5d = 17.$$

Dakle, treba riješiti sistem linearnih jednačina

$$2a_1 + 6d = 22$$
$$a_1 + 5d = 17.$$

Njegovim rješavanjem se dobije da je $a_1 = 2$ i $d = 3$.

Zbir drugog i četvrtog člana je

$$a_2 + a_4 = a_1 + d + a_1 + 3d = 2a_1 + 4d = 16.$$

Tačan odgovor je d.

Zadatak 20. Kvadratni trinom $2x^2 + x - 3$ se može rastaviti na sljedeće članove:

a) $(2x+3)(x+1)$ b) $(2x+3)(x-1)$ c) $(2x-3)(x-1)$ d) $(2x-3)(x+1)$

Rješenje:

Kvadratni trinom se može rastaviti na članove rastavljanjem srednjeg člana na sljedeći način:

$$2x^2 + x - 3 = 2x^2 + 3x - 2x - 3 = x(2x+3) - (2x+3) = (2x+3)(x-1)$$

Tačan odgovor je b.