ŠIFRA KANDIDATA _ _ _ _ _

Zadatak 1. Odrediti parametar k tako da kvadratna jednačina $\left(\frac{k}{3}-1\right)x^2-(2k-8)x+k-2=0$ ima samo jedno rješenje. Umnožak cjelobrojne vrijednosti tako nađenog parametra k i rješenja jednačine za taj slučaj je:

a) 10 b) 7 c)-3/2 d) 12

Rješenje: Kvadratna jednačina ima samo jedno rješenje ako i samo ako je njena diskriminanta jednaka nuli. Iz tog uslova se može odrediti vijednost parametra k kao što slijedi:

$$D=(2k-8)^2-4\left(\frac{k}{3}-1\right)(k-2)=0$$

$$4k^2-32k+64-\frac{4}{3}k^2+4k+\frac{8}{3}k-8=0$$

sređivanjem i množenjem sa 3 se dobija

$$8k^2-76k+168=0$$

dijeljenjem sa 4 se dobije

$$2k^2-19k+42=0.$$

Rješenja ove kvadratne jednačine su: $k_{1,2}=\frac{19\pm\sqrt{361-336}}{4}=\frac{19\pm5}{4}$. Samo je jedno rješenje cjelobrojno i to je k = 6.

Data kvadratna jednačina se u tom slučaju svodi na $x^2-4x+4=0$, odnosno $(x-2)^2=0$.

Traženi umnožak je $k\cdot x=6\cdot2=12$. Tačan odgovor je d.

Zadatak 2. Posuda okruglog dna poluprečnika $\frac{20}{\sqrt{\pi}}$ cm ima ukupnu visinu 1 m. Koliko se utroši litara vode da se posuda napuni do 25% visine.

a) 1 litar b) 0,4 litara c) 10 litara d) 2 litra

Rješenje:

Zapremina vode koja je utrošena je $V=r^2\pi h_v$, pri čemu je visina vode $h_v=0{,}25m$.

$$V=\left(\frac{0{,}2}{\sqrt{\pi}}\right)^2\pi0{,}25=\frac{0{,}04}{\pi}\pi0{,}25=0{,}01m^3=0{,}01\ 10^3dm^3=10l.$$

Utroši se 10 litara vode. Tačan odgovor je c.

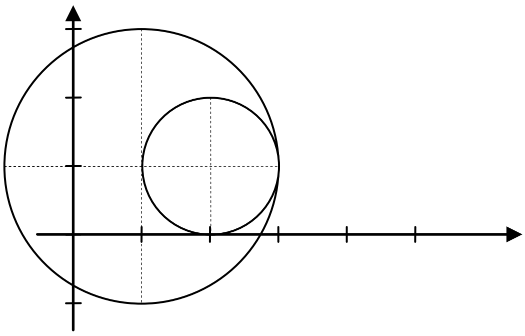
Zadatak 3. Kružnica opisana jednačinom $(x-2)^2+(y-1)^2=1^2$ i kružnica opisana jednačinom $x^2+y^2-2x-2y-2=0$ se dodiruju samo u jednoj tački. Kolika je udaljenost između centara kružnica?

a) 1 b) 3 c) $2\sqrt{10}$ d) $4\sqrt{2}$

Rješenje:

Udaljenost centara za dvije kružnice koje se dodiruju u jednoj tački je jednaka zbiru ili razlici njihovih poluprečnika zavisno od njihovog međusobnog položaja. Prva kružnica ima poluprečnik $r_1=1$.

Jednačina druge kružnice se može napisati u obliku $x^2+y^2-2x-2y+2-4=0$ odnosno $(x-1)^2+(y-1)^2=2^2$, odakle se vidi da je njen poluprečnik $r_2=2$. Tražena udaljenost je jednaka razlici poluprečnika (vidi sliku), $r_2-r_1=2-1=1$. Tačan odgovor je a.



Zadatak 4. U skupu realnih brojeva riješiti nejednačinu $\sqrt{4x^2-4x+1}\le 2x-1$.

a) $x\ge\frac{1}{2}$ b) $x\ne\frac{1}{2}$ c) $x\in\mathbb{R}$ d) $x\in\varnothing$

Rješenje: Definiciono područje ove jednačine određeno je sa $4x^2-4x+1\ge 0 \Leftrightarrow (2x-1)^2\ge 0 \Leftrightarrow x\in\mathbb{R}$.

Obzirom da je sa lijeve strane nejednačine kvadratni aritmetički korijen i u nejednačini je znak $\le$ to izraz sa desne strane treba biti negativan da bi nejednačina imala realna rješenja, pa je

$$2x-1\ge 0 \Leftrightarrow x\ge\frac{1}{2} \qquad (1)$$

Nakon kvadriranja početne nejednačine slijedi: $4x^2-4x+1\le 4x^2-4x+1$.

Ova nejednačina je ispunjena za svako $x\in\mathbb{R}$, a kako je ona ekvivalentna početnoj nejednačini pod uslovom (1), to je rješenje početne jednačine uslov (1). Tačan odgovor je a.

Zadatak 5. Rješenje jednačine $(1+i)^m=(1-i)^m$, gdje je $m \in \mathbb{Z}$, je:

a) $m=4k,\ k\in Z$ b) $m=2k+1,\ k\in Z$ c) $m=4k-3,\ k\in Z$ d) $m=2k,\ k\in Z$

Rješenje:

Iz $(1+i)^m=(1-i)^m$ slijedi da je $\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^m=1$, a racionalizacijom nazivnika slijedi

$$\left(\frac{(1+i)^2}{(1-i)(1+i)}\right)^m=\left(\frac{1+2i+i^2}{1^2-i^2}\right)^m=i^m=1.$$

Rješenje jednačine je $m=4k$, $k\in \mathbb{Z}$. Tačan odgovor je a.

Zadatak 6. Ako je $\operatorname{Re}\left(\frac{1}{z}\right)=-1$ i $\operatorname{Im}\left(\frac{z}{i}\right)=1$, tada je $\arg(z)$:

a) $\frac{\pi}{4}$ b) $\frac{\pi}{2}$ c) $\frac{3\pi}{4}$ d) π

Rješenje: Neka je $z=x+iy$, gdje su x i y realni brojevi, a i imaginarna jedinica.

Vrijedi da je: $\frac{1}{z}=\frac{1}{x+iy}\cdot\frac{x-iy}{x-iy}=\frac{x-iy}{x^2+y^2}=\frac{x}{x^2+y^2}+i\frac{-y}{x^2+y^2}$,

te $\operatorname{Re}\left(\frac{1}{z}\right)=\frac{x}{x^2+y^2}=-1$ (1)

Takođe vrijedi da je: $\frac{z}{i}=\frac{x+iy}{i}=y-ix$,

odnosno $\operatorname{Im}\left(\frac{z}{i}\right)=-x$, tj. $x=-1$ (2)

Uvrštavajući vrijednost x = -1 u jednačinu (2) slijedi da je y=0.

Znači, $z=-1+i\cdot 0$, pa je $\arg(z)=\pi$. Tačan odgovor je d.

Zadatak 7. Odrediti x u sljedećem nizu brojeva: $1_{(2)}$, $2_{(3)}$, $11_{(3)}$, $8_{(x)}$, $22_{(7)}$.

a) $x=5$ b) $x=4$ c) $x=10$ d) $x=7$

Rješenje:

Napišimo najprije sve elemente niza u dekadnom brojevnom sistemu: $1_{(2)}=1\cdot 2^0=1_{(10)}$, $2_{(3)}=2\cdot 3^0=2_{(10)}$, $11_{(3)}=1\cdot 3^1+1\cdot 3^0=3+1=4_{(10)}$, $22_{(7)}=2\cdot 7^1+2\cdot 7^0=14+2=16_{(10)}$.

Sada nije teško vidjeti da elementi niza pripadaju geometrijskoj progresiji $a_n=a_0q^n, n\in\mathbb{N}_0$ gdje je $a_0=1$ i $q=2$. Elementi niza su redom $a_0=1$, $a_1=2$, $a_2=4$, $a_3=8$, $a_4=16$, pa je $a_3=8_{(10)}$, odnosno x=10.

Tačan odgovor je c.

Zadatak 8. Ukupan broj rješenja jednačine $\sin x=-\sin 2x$ segmenta $[-\pi,\pi]$ je:

a) 2 b) 3 c) 4 d) 5

Rješenje:

Jednačina $\sin x=-\sin 2x$ se transformiše u $\sin x=-2\sin x\cos x\Rightarrow \sin x(1+2\cos x)=0$.

Rješenja prethodne jednačine su ili $\sin x=0$ ili $1+2\cos x=0$, što daljim rješavanjem daje:

$$\sin x=0\Rightarrow x=k\pi,\ k\in Z$$

$$\cos x=-\frac{1}{2}\Rightarrow x=\pm\frac{2\pi}{3}+2m\pi, m\in Z$$

Uvrštavanjem k i m se dobije da su unutar segmenta $[-\pi,\pi]$ nalaze rješenja $x=-\pi$, $x=0$, $x=\pi$, $x=-\frac{2\pi}{3}$, $x=\frac{2\pi}{3}$, ukupno 5 rješenja.

Tačan odgovor je d.

Zadatak 9. Rješenje logaritamske jednačine $\log\left(x^2-3x+5\right)=\log\left(x^2+5x+7\right)$ u skupu realnih brojeva je:

a) $x=-\frac{1}{4}$ b) $x=\frac{1}{4}$ c) Nema rješenja. d) $x=-4$

Rješenje:

Domen date jednačine je:

$$\cap\begin{cases} x^2-3x+5>0 \\ x^2+5x+7>0 \end{cases}$$

Za kvadratnu jednačinu $x^2-3x+5=0$ je $a=1>0$ i $D=b^2-4ac=9-20<0$, pa zaključujemo da vrijedi $x^2-3x+5>0$ za $\forall x\in\mathbf{R}$.
Za kvadratnu jednačinu $x^2+5x+7=0$ je $a=1>0$ i $D=b^2-4ac=25-28<0$, pa zaključujemo da vrijedi $x^2+5x+7>0$ za $\forall x\in\mathbf{R}$.
Dakle domen zadane jednačine je $\forall x\in\mathbf{R}$.
Zadana jednačina je ekvivalentna sa:

$$x^2-3x+5=x^2+5x+7\Rightarrow -8x=2\Rightarrow x=-\frac{1}{4},$$

Tačan odgovor je a.

Zadatak 10. Rješenje eksponencijalne jednačine $1000\cdot 10^{3x-4}=100^{\frac{x+1}{6}}$ je:

a) $x=\frac{1}{2}$ b) $x=\frac{1}{4}$ c) $x=2$ d) $x=4$

Rješenje: Data jednačina je ekvivalentna sa jednačinama:

$$10^{3x-4+3}=10^{2\frac{x+1}{6}},$$

$$10^{3x-1}=10^{\frac{x+1}{3}},$$

$$3x-1=\frac{x+1}{3},$$

$$9x-3=x+1,$$

$$x=\frac{1}{2}.$$

Tačan odgovor je a.

Zadatak 11. Ako je $\sin\alpha = 0{,}8\ \left(\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi\right)$, tada je vrijednost $\cos\left(\alpha - \frac{\pi}{3}\right)$:

a) $\frac{1}{10}\left(-4+3\sqrt{3}\right)$ b) $\frac{1}{10}\left(3+4\sqrt{3}\right)$ c) $\frac{1}{10}\left(4+3\sqrt{3}\right)$ d) $\frac{1}{10}\left(-3+4\sqrt{3}\right)$

Rješenje:

$$\sin\alpha = 0{,}8\ \left(\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi\right) \Rightarrow \cos\alpha = -\sqrt{1-\sin^2\alpha} = -0{,}6$$

$$\cos\left(\alpha - \frac{\pi}{3}\right) = \cos\alpha\cdot\cos\frac{\pi}{3} + \sin\alpha\cdot\sin\frac{\pi}{3} = -0{,}6\cdot\frac{1}{2} + 0{,}8\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{10}\left(-3+4\sqrt{3}\right)$$

Tačan odgovor je d.

Zadatak 12. Ako je zbir trećeg i petog člana aritmetičkog niza 22, a šesti član je 17, zbir drugog i četvrtog člana je:

a)14 b) 12 c) 10 d) 16

Rješenje:

Za n-ti član aritmetičkog niza vrijedi

$$a_n = a_1 + (n-1)\cdot d$$

gdje je a_1 prvi član niza, a d je diferencija niza.

Na osnovu uslova iz postavke zadatka je

$$a_3 + a_5 = a_1 + 2d + a_1 + 4d = 2a_1 + 6d = 22,$$
$$a_1 + 5d = 17.$$

Dakle, treba riješiti sistem linearnih jednačina

$$2a_1 + 6d = 22$$
$$a_1 + 5d = 17.$$

Njegovim rješavanjem se dobije da je $a_1 = 2$ i $d = 3$.

Zbir drugog i četvrtog člana je

$$a_2 + a_4 = a_1 + d + a_1 + 3d = 2a_1 + 4d = 16.$$

Tačan odgovor je d.

Zadatak 13. Pojednostavljenjem izraza $\left(\frac{a}{a+b}-\frac{a}{b}\right):\frac{ab}{a+b}$ u skupu realnih brojeva, ako je $a,b\neq 0$, $a\neq -b$ dobija se:

a) $\frac{a}{b}$ b) $\frac{b}{a}$ c) 1 d) $-\frac{a}{b^2}$

Rješenje:

Zadati izraz se može napisati u obliku:

$$\frac{ab-a^2-ab}{(a+b)\cdot b}:\frac{ab}{a+b}=\frac{-a^2}{(a+b)\cdot b}:\frac{ab}{a+b}=\frac{-a^2}{(a+b)\cdot b}\cdot\frac{a+b}{ab}=$$

$$=\frac{-a^2}{b}\cdot\frac{1}{ab}=-\frac{a}{b^2}$$

Tačan odgovor je d.

Zadatak 14. Rješenje nejednačine $\log_2\left(x^2-3x+4\right)<\log_2 2$ je skup:

a) $(1,2)$ b) $(0,2)$ c) $(-\infty,-1)\cup(2,+\infty)$ d) $(-\infty,1]\cup(2,+\infty)$

Rješenje:

Domen date nejednačine je skup $\left\{x\in\mathbb{R}: x^2-3x+4>0\right\}=\mathbb{R}$. Data nejednačina je ekvivalentna nejednačinama

$x^2-3x+4<2,$

$x^2-3x+2<0,$

$(x-1)\cdot(x-2)<0.$

Rješenje dobivene kvadratne nejednačine je skup $(1,2)$.

Tačan odgovor je a.

Zadatak 15. Jednačina kružnice koncentrične sa $(x+3)^2+(y+1)^2=5$, a koja prolazi kroz tačku T(1, -4) je:

a) $K:(x+3)^2+(y+1)^2=25$ b) $K:(x-3)^2+(y-1)^2=16$

c) $K:(x+3)^2+(y+1)^2=16$ d) $K:(x-3)^2+(y-1)^2=25$

Rješenje:

Iz jednačine date kružnice se može izračunati da je:

$(x+3)^2+(y+1)^2=5 \Rightarrow C(-3,-1)$, $r=\sqrt{5}$.

Tražena kružnica je

$K:(x+3)^2+(y+1)^2=R^2$, $T(1,-4)\in K \Rightarrow (1+3)^2+(-4+1)^2=R^2 \Rightarrow R=5$

Tačan odgovor je a.

Zadatak 16. Ako je ostatak pri dijeljenju polinoma x^3+2x^2+ax+b polinomom x^2-x-2 jednak $7x+7$ onda je $a+2b$ jednako:

a) 0 b) 2 c) 3 d) 4

Rješenje:

Dijeljenjem polinoma x^3+2x^2+ax+b polinomom x^2-x-2 slijedi:

$$
\begin{array}{l}
(x^3+2x^2+ax+b):(x^2-x-2)=x+3 \\
\underline{-x^3+x^2+2x} \\
\quad 3x^2+2x+ax+b \\
\quad \underline{-3x^2+3x+6} \\
\qquad 5x+ax+b+6
\end{array}
$$

Dakle ostatak dijeljenja je $5x+ax+b+6$ a to je jednako $7x+7$.

Izjednačavajući odgovarajuće koeficijente uz x i slobodan član slijedi:

$5+a=7 \Rightarrow a=2$,

$b+6=7 \Rightarrow b=1$

Na osnovu ovog slijedi da je $a+2b=4$

Tačan odgovor je d.

Zadatak 17. Sve vrijednosti realnog parametra k za koje prava $p: y = kx + 2$ predstavlja tangentu kružnice $K: x^2 + y^2 = 1$ su:

a) 1 b) $\pm\frac{\sqrt{3}}{2}$ c) ± 2 d) $\pm\sqrt{3}$

Rješenje:

Da bi prava bila tangenta kružnice potreban i dovoljan uslov jeste da sistem jednačina

$$x^2 + y^2 = 1$$
$$y = kx + 2$$

ima samo jedno rješenje.

Uvrštavajući drugu jednačinu u prvu, dobije se

$$x^2 + (kx + 2)^2 = 1.$$

Posljednja jednačina se može svesti na oblik

$$x^2(1 + k^2) + 4kx + 3 = 0.$$

Početni sistem jednačina će imati samo jedno rješenje, tj. prava p će biti tangenta kružnice K ako ova kvadratna jednačina ima samo jedno rješenje, dakle ako joj je diskriminanta jednaka nuli. Iz tog uslova dobije se

$$D = 16k^2 - 12(1 + k^2) = 0 \Leftrightarrow 16k^2 - 12 - 12k^2 = 0,$$
$$k^2 = 3 \Rightarrow k = \pm\sqrt{3}$$

Tačan odgovor je d.

Zadatak 18. Ostatak pri dijeljenju polinoma $P(x) = 2x^5 + 2x^4 + x^2 - 12x + 1$ polinomom $Q(x) = x + 1$ je:

a) -6 b) 14 c) 16 d) 0

Rješenje:

Po Bezuovom stavu ostatak pri dijeljenju polinoma $P(x)$ polinomom oblika $(x - a)$ je vrijednost $P(a)$. Primjenom tog stava zaključuje se da ostatak pri dijeljenju $P(x)$ sa $Q(x) = x - (-1)$ iznosi

$$P(-1) = 2\cdot(-1)^5 + 2\cdot(-1)^4 + (-1)^2 - 12\cdot(-1) + 1 = -2 + 2 + 1 + 12 + 1 = 14.$$

Tačan odgovor je b.

Zadatak 19. Koliko je četverocifrenih prirodnih brojeva djeljivih sa 5?

a) 8996 b) 1800 c) 2000 d) 4500

Rješenje:

Prirodan broj djeljiv sa 5 je ako i samo ako mu je cifra jedinica u dekadnom brojevnom sistemu ili 5 ili 0. Cifre desetica i stotica se mogu izabrati bez ograničenja iz skupa $\{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$, dok se u cifri hiljada kao prvoj cifri broja ne smije pojaviti 0. Prema multiplikativnom principu postoji $9 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 2 = 1800$ brojeva koji ispunjavaju navedene uslove.

Tačan odgovor je b.

Zadatak 20. Neka je $x \in [-\pi, \pi]$. Rješenje nejednačine $\sin x - \sqrt{3}\cos x < 0$ je:

a) $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ b) $x \in \left(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}\right)$ c) $x \in \left(-\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}\right)$ d) $x \in \left(-\frac{2\pi}{3}, \frac{\pi}{3}\right)$

Rješenje:

Nejednačina transformacijom postaje

$$\sin x \cdot \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\cos(x) < 0$$
$$\sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right) < 0$$
.

Rješenje ove nejednačine je

$$-\pi + 2k\pi < x - \frac{\pi}{3} < 0 + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$$
$$-\frac{2\pi}{3} + 2k\pi < x < \frac{\pi}{3} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$$
,

Uzimajući u obzir da je $x \in [-\pi, \pi]$, slijedi da je rješenje $x \in \left(-\frac{2\pi}{3}, \frac{\pi}{3}\right)$.

Tačan odgovor je d.