ŠIFRA KANDIDATA _ _ _ _ _

Zadatak 1. Koliko rješenja jednačine $3t^4 - 10t^2 - 8 = 0$ pripada skupu prirodnih brojeva?

a)1 b)2 c)0 d) 4

Rješenje: Data je bikvadratna jednačina koja se rješava uvođenjem smjene $t^2 = x \geq 0$, čime se jednačina svodi na $3x^2 - 10x - 8 = 0$. Rješenja ove kvadratne jednačine su $x_{1,2} = \frac{10 \pm \sqrt{100+96}}{6} = \frac{10 \pm 14}{6}$. Jedno rješenje ove jednačine je negativno i ne zadovoljava uslov smjene. Drugo rješenje je pozitivno i zadovoljava uslov smjene, tako da vrijedi: $t^2 = x = 4$, tako da početna jednačina ima dva rješenja u skupu realnih brojeva $t_{1,2} = \pm 2$. Jedino rješenje početne jednačine koje pripada skupu prirodnih brojeva je t=2. Tačan odgovor je a.

Zadatak 2. U posudu oblika uspravnog valjka nasuta je voda do trećine visine. Obim kružne baze posude iznosi 0.6π metara, a visina posude iznosi 0.8 metara. Koliko se tečnosti može dosuti u posudu ako je želimo napuniti do vrha:

a) 0.072π litara b) 72π litara c) 48π litara d) 24π litara

Rješenje:

Iz obima kružne baze $O = 2R\pi = 0.6\pi$ se može izračunati poluprečnik $R = 0.3m$.

Ukoliko je posuda napunjena do trećine visine ostaje 2/3 visine da napunimo posudu do vrha pa je tražena zapremina: $V = R^2\pi\frac{2}{3}H = 0.3^2\pi\frac{2}{3}0.8 = 0.048\pi\, m^3 = 0.048\pi 10^3 dm^3 = 48\pi\, l$ Tačan odgovor je c.

Zadatak 3. Površina jednakostraničnog trougla stranice ***a*** iznosi 6 jedinica. Površina kvadrata čija je stranica takođe ***a*** je:

a) $8\sqrt{3}$ b) $\frac{12}{\sqrt{3}}$ c) $\frac{8}{\sqrt{3}}$ d) $12\sqrt{3}$

Rješenje:
Ako je ***a*** stranica jednakostranničnog trougla, onda je njegova površina je

$$P_{\Delta} = \frac{\sqrt{3}}{4} a^2 = 6 .$$

Površina kvadrata stranice ***a*** iznosi:

.

$$P_{\square} = a^2 = \frac{4P_{\Delta}}{\sqrt{3}} = \frac{24}{\sqrt{3}} = 8\sqrt{3}$$

Tačan odgovor je a.

Zadatak 4. Za kvadratnu funkciju oblika $f(x) = ax^2 + bx + c$ poznato je $f(0) = 2; \quad f(1) = 3$ i $f(-2) = 12$. Vrijednost $f(-1)$ iznosi:

a) 0 b) 5 c) -1/2 d) 2

Rješenje: Uvrštavanjem poznatih vrijednosti u opšti oblik kvadratne funkcije dobija se:

$$f(0) = c = 2$$
$$f(1) = a + b + c = 3$$
$$f(-2) = 4a - 2b + c = 12$$

Što se uvrštavanjem c iz prve jednačine svede na: $\begin{matrix} a+b=1 \\ 4a-2b=10 \end{matrix}$. Odavde se množenjem prve jednačine sa 2 i sabiranjem jednačina dobija $6a = 12 \Rightarrow a = 2$, i vraćanjem u jednu od jednačina posljednjeg sistema dobija se $b = -1$. Kvadratna funkcija je $f(x) = 2x^2 - x + 2$. Dakle $f(-1) = 2 + 1 + 2 = 5$. Tačan odgovor je b.

Zadatak 5 Neka je $x \in [0, \pi]$. Suma rješenja jednačine $\sin x - \cos x = \frac{\sqrt{6}}{2}$ koja pripadaju navedenom segmentu je:

a) $\frac{\pi}{4}$ b) $\frac{3\pi}{4}$ c) $\frac{\pi}{3}$ d) $\frac{3\pi}{2}$

Rješenje:
Jednačina transformacijom postaje

$$\sin x - \cos x = \frac{\sqrt{6}}{2} \Big| \div \sqrt{2}$$

$$\frac{\sqrt{2}}{2}\sin x - \frac{\sqrt{2}}{2}\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Rješenje ove jednačine je

$$x - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \quad x - \frac{\pi}{4} = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi \quad k \in Z$$

$$x = \frac{7\pi}{12} + 2k\pi \qquad x = \frac{11\pi}{12} + 2k\pi \qquad k \in Z$$

Uzimajući u obzir da je $x \in [0, \pi]$, slijedi da su rješenja $x_1 = \frac{7\pi}{12}$ $x_2 = \frac{11\pi}{12}$.

Tačan odgovor je d.

Zadatak 6. Vrijednost izraza $\left|\frac{1+z}{1-z}\right|$, za $z = 2i$, je:

a) a) 5 b) 2 c) 1 d) $\sqrt{5}$

Rješenje: Nakon korištenja pravila za apsolutnu vrijednost količnika izraz $\left|\frac{1+z}{1-z}\right|$ postaje

$$\left|\frac{1+z}{1-z}\right| = \frac{|1+z|}{|1-z|} = \frac{|1+2i|}{|1-2i|} = \frac{\sqrt{1+2^2}}{\sqrt{1+(-2)^2}} = 1.$$

Tačan odgovor je c.

Zadatak 7. Koliko rješenja u intervalu $[\pi, 2\pi)$ ima trigonometrijska jednačina

$\sin^2 x + \frac{1}{2}\sin 2x = 1$?

a) niti jedno b) dva c) četiri d) šest

Rješenje: Zadana jednačina može se napisati u obliku

$$\frac{1-\cos 2x}{2} + \frac{1}{2}\sin 2x = 1 \Leftrightarrow -\frac{1}{2}\cos 2x + \frac{1}{2}\sin 2x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow -\frac{\sqrt{2}}{2}\cos 2x + \frac{\sqrt{2}}{2}\sin 2x = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Obzirom da je $\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ i $\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$, može se pisati:

$$\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\cos 2x + \cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)\sin 2x = \frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow \sin\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} = \sin\frac{\pi}{4},$$

Pa postoje dva skupa rješenja: $2x - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4} + 2k\pi \vee 2x - \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4} + 2m\pi,\ m,k \in Z$,

odnosno $x = \frac{\pi}{4} + k\pi \vee x = \frac{\pi}{2} + m\pi,\ m,k \in Z$.

Od ovih rješenja intervalu $[\pi, 2\pi)$ pripadaju ona koja se dobiju za $m,k = 1$, odnosno

$x \in \left\{\frac{5\pi}{4}, \frac{3\pi}{2}\right\}$. Tačan odgovor je b.

Zadatak 8. Odrediti najveću cjelobrojnu vrijednost parametra k za koje će nejednačina $-x^2 + (2k+1)x - k^2 \le 0$ biti zadovljena za svako $x \in \Re$

a) -4 b) -1 c) -2 d) 4

Rješenje:

Nejednačina oblika $ax^2 + bx + c \le 0$ zadovoljena je za svako $x \in \Re$ ukliko vrijedi $a < 0$ i $D = b^2 - 4ac \le 0$. U zadatku je prvi uslov očigledno zadovoljen, a drugi uslov se svodi na:

$D = (2k+1)^2 - 4k^2 = 4k + 1 \le 0$ što je zadovoljeno za $k \le -\frac{1}{4}$. Najveće cjelobrojno rješenje je -1.

Tačan odgovor je b.

Zadatak 9. Zadata su prava $p: x - 5 = 0$ i tačka $M(7,4)$. Odrediti pravu q okomitu na pravu p, čija je udaljenost od tačke M jednaka udaljenosti prave p od tačke M, te koja ima vrijednost veću od 5 za bar jednu vrijednost argumenta x.

a) $y - 6 = 0$ b) $y - 8 = 0$ c) $x + y - 6 = 0$ d) $x + y - 8 = 0$

Rješenje:

Prava p je prava paralelna y osi, te je njena udaljenost od tačke M jednaka 2. Prava q koja je okomita na pravu p će biti paralelna x osi, te obzirom da njena udaljenost od tačke M mora biti ista kao i udaljenost prave p od tačke M, to imamo dvije opcije $q_1: y = 2$, $q_2: y = 6$. Obzirom da vrijednost funkcije mora biti veća od 5 bar za neke vrijednosti argumenta, to je rješenje $q: y - 6 = 0$.
Tačan odgovor je a.

Zadatak 10. Rješenje eksponencijalne jednačine $1000 \cdot 10^{3x-4} = 100^{\frac{x+1}{6}}$ je:

a) $x = \frac{1}{2}$ b) $x = \frac{1}{4}$ c) $x = 2$ d) $x = 4$

Rješenje: Data jednačina je ekvivalentna sa jednačinama:

$10^{3x-4+3} = 10^{2\frac{x+1}{6}}$,

$10^{3x-1} = 10^{\frac{x+1}{3}}$,

$3x - 1 = \frac{x+1}{3}$,

$9x - 3 = x + 1$,

$x = \frac{1}{2}$.

Tačan odgovor je a.

Zadatak 11. Odredite koliko se različitih četverocifrenih brojeva može napisati pomoću cifara iz skupa $\{2, 4, 5, 7\}$ ukoliko se cifre ne ponavljaju.

a)124 b) 24 c) 48 d) 86

Rješenje:

Prvu cifru možemo izabrati na 4 načina, sljedeću na3 načina (jer smo jednu cifru već upotrijebili), itd. Zaključujemo da se radi o klasičnim permutacijama bez ponavljanja skupa $\{2, 4, 5, 7\}$. Odnosno broj četverocifrenih brojeva je $\mathrm{P}(4) = 4! = 24$. Tačan odgovor je b.

Zadatak 12. Ako je zbir trećeg i petog člana aritmetičkog niza 22, a šesti član je 17, zbir drugog i četvrtog člana je:

a)14 b) 12 c) 10 d) 16

Rješenje:

Za *n*-ti član aritmetičkog niza vrijedi

$$a_n = a_1 + (n-1)\cdot d$$

gdje je a_1 prvi član niza, a d je diferencija niza.

Na osnovu uslova iz postavke zadatka je

$$a_3 + a_5 = a_1 + 2d + a_1 + 4d = 2a_1 + 6d = 22,$$
$$a_1 + 5d = 17.$$

Dakle, treba riješiti sistem linearnih jednačina

$$2a_1 + 6d = 22$$
$$a_1 + 5d = 17.$$

Njegovim rješavanjem se dobije da je $a_1 = 2$ i $d = 3$.

Zbir drugog i četvrtog člana je

$$a_2 + a_4 = a_1 + d + a_1 + 3d = 2a_1 + 4d = 16.$$

Tačan odgovor je d.

Zadatak 13. Proizvod rješenja jednačine $3|1-3x| = 2-x+|6x-2|$ je

a) $\frac{3}{8}$; b) $\frac{8}{3}$; c) $-\frac{3}{8}$; d) $-\frac{8}{3}$.

Rješenje:

Oblast rješavanja zadane jednačine je čitav skup realnih brojeva. S obzirom da je $|6x-2| = 2|3x-1|$ i $|1-3x| = |3x-1|$, tada je zadana jednačina ekvivalentna sa $3|3x-1| = 2-x+2|3x-1|$,

tj. sa $|3x-1| = 2-x$.

Oblast rješavanja posljednje jednačine je $2-x \geq 0$, tj. $x \leq 2$. Posljednja jednačina je ekvivalentna sa $3x-1=2-x$, ili $3x-1=-(2-x)$ čija su rješenja redom $x=\frac{3}{4}$ ili $x=-\frac{1}{2}$, i oba zadovoljavaju oblast rješavanja posljednje jednačine, tj. uslov $x \leq 2$.

Proizvod rješenja jednačine je $-\frac{3}{8}$. Tačan odgovor je c.

Zadatak 14. Rješenje nejednačine $\log_2\left(x^2-3x+4\right) < \log_2 2$ je skup:

a) $(1,2)$ b) $(0,2)$ c) $(-\infty,-1)\cup(2,+\infty)$ d) $(-\infty,1]\cup(2,+\infty)$

Rješenje:

Domen date nejednačine je skup $\left\{x \in \mathbb{R} : x^2-3x+4>0\right\} = \mathbb{R}$. Data nejednačina je ekvivalentna nejednačinama

$x^2-3x+4<2,$

$x^2-3x+2<0,$

$(x-1)\cdot(x-2)<0.$

Rješenje dobivene kvadratne nejednačine je skup $(1,2)$.

Tačan odgovor je a.

Zadatak 15. Ako je $f\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{2x+3}{3x-2}$, onda je $f^{-1}(x)$ jednako:

a) $\frac{3x-2}{2x+3}$ b) $\frac{x+1}{x-1}$ c) $\frac{2x+3}{3x+1}$ d) $\frac{2x+1}{x+1}$

Rješenje:

$$f\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{2x+3}{3x-2}=\frac{2+3\left(\frac{1}{x}\right)}{3-2\left(\frac{1}{x}\right)}\Rightarrow f(x)=\frac{2+3x}{3-2x}$$

$$f(y)=x\Rightarrow f^{-1}(x)=y$$

$$\frac{2+3y}{3-2y}=x\Rightarrow 2+3y=(3-2y)x\Rightarrow y=\frac{3x-2}{2x+3}$$

$$f(y)=x\Rightarrow f^{-1}(x)=y=\frac{3x-2}{2x+3}$$

Tačan odgovor je a.

Zadatak 16. Ako je ostatak pri dijeljenju polinoma x^3+2x^2+ax+b polinomom x^2-x-2 jednak $7x+7$ onda je $a+2b$ jednako:

a) 0 b) 2 c) 3 d) 4

Rješenje:

Dijeljenjem polinoma x^3+2x^2+ax+b polinomom x^2-x-2 slijedi:

$$(x^3+2x^2+ax+b):(x^2-x-2)=x+3$$

$$\underline{-x^3+x^2+2x}$$

$$3x^2+2x+ax+b$$

$$\underline{-3x^2+3x+6}$$

$$5x+ax+b+6$$

Dakle ostatak dijeljenja je $5x+ax+b+6$ a to je jednako $7x+7$.

Izjednačavajući odgovarajuće koeficijente uz x i slobodan član slijedi:

$5+a=7\Rightarrow a=2$,

$b+6=7\Rightarrow b=1$

Na osnovu ovog slijedi da je $a+2b=4$

Tačan odgovor je d.

Zadatak 17. Sve vrijednosti realnog parametra k za koje prava $p: y = kx + 2$ predstavlja tangentu kružnice $K: x^2 + y^2 = 1$ su:

a) 1 b) $\pm\frac{\sqrt{3}}{2}$ c) ± 2 d) $\pm\sqrt{3}$

Rješenje:

Da bi prava bila tangenta kružnice potreban i dovoljan uslov jeste da sistem jednačina

$$x^2 + y^2 = 1$$
$$y = kx + 2$$

ima samo jedno rješenje.

Uvrštavajući drugu jednačinu u prvu, dobije se

$$x^2 + (kx+2)^2 = 1.$$

Posljednja jednačina se može svesti na oblik

$$x^2\left(1+k^2\right) + 4kx + 3 = 0.$$

Početni sistem jednačina će imati samo jedno rješenje, tj. prava p će biti tangenta kružnice K ako ova kvadratna jednačina ima samo jedno rješenje, dakle ako joj je diskriminanta jednaka nuli. Iz tog uslova dobije se

$$D = 16k^2 - 12\left(1+k^2\right) = 0 \Leftrightarrow 16k^2 - 12 - 12k^2 = 0,$$
$$k^2 = 3 \Rightarrow k = \pm\sqrt{3}$$

Tačan odgovor je d.

Zadatak 18. Ostatak pri dijeljenju polinoma $P(x) = 2x^5 + 2x^4 + x^2 - 12x + 1$ polinomom $Q(x) = x + 1$ je:

a) -6 b) 14 c) 16 d) 0

Rješenje:

Po Bezuovom stavu ostatak pri dijeljenju polinoma $P(x)$ polinomom oblika $(x-a)$ je vrijednost $P(a)$. Primjenom tog stava zaključuje se da ostatak pri dijeljenju $P(x)$ sa $Q(x) = x - (-1)$ iznosi

$$P(-1) = 2\cdot(-1)^5 + 2\cdot(-1)^4 + (-1)^2 - 12\cdot(-1) + 1 = -2 + 2 + 1 + 12 + 1 = 14.$$

Tačan odgovor je b.

Zadatak 19. Koliko je četverocifrenih brojeva djeljivih sa 4?

a) 2250;	b) 2000;	c) 2500;	d) 2750.

Rješenje:

Prirodan broj je djeljiv sa 4 ako i samo ako je broj koji čine njegove posljednje dvije cifre (cifra desetica i cifra jedinica) djeljiv sa 4.

Posljednje dvije cifre četverocifrenog broja djeljivog sa 4 se mogu izabrati na 25 načina (xx00, xx04, xx08,..., xx96).

Cifre stotica se mogu izabrati bez ograničenja iz skupa {0,1,2,3,4,5,6,7,8,9}, dok se cifre hiljadica mogu izabrati bez ograničenja iz skupa {1,2,3,4,5,6,7,8,9}. Prema multiplikativnom principu postoji 25·10·9=2250 četverocifrenih brojeva koji su djeljivi sa 4.¨

Tačan odgovor je a.

Zadatak 20. Koliko realnih rješenja ima jednačina $\sqrt{x^2+1}=1-x^2$?
a) niti jedno b) jedno c) tri d) četiri

Rješenje:

Definiciono područje ove nejednačine određeno je sa $x^2+1\geq 0 \Leftrightarrow x\in\mathbb{R}$.

Obzirom da je sa lijeve strane jednakosti kvadratni aritmetički korijen to izraz sa desne strane treba biti nenegativan, pa je $1-x^2\geq 0 \Leftrightarrow x\in[-1,1]\ (2)$. Sada nakon kvadriranja početne jednačine imamo

$$x^2+1=x^4-2x^2+1,$$
$$x^4-3x^2=0,$$
$$x^2\left(x^2-3\right)=0.$$

Moguća rješenja su $x_1=0\vee x_2=\sqrt{3}\vee x_3=-\sqrt{3}$, od kojih samo rješenje x_1 ispunjava uslov (2), pa postoji **jedan** realan broj koji ispunjava datu jednačinu.
Tačan odgovor je b.