Univerzitet u Sarajevu
Elektrotehnički fakultet Sarajevo

**Rješenja zadataka sa kvalifikacionog ispita za prvi ciklus studija u akademskoj 2009/2010. godini**

**- Grupa A -**

**1. zadatak**

$$y = x^2 - 3x - 4$$

Nule funkcije:

$$D = b^2 - 4ac = (-3)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-4) = 25$$

D=25>0, imamo dva realna i različita rješenja.

$$x_{1/2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{3 \pm 5}{2} \longrightarrow \begin{matrix} x_1 = -1 \\ x_2 = 4 \end{matrix}$$

Tjeme funkcije $y = x^2 - 3x - 4$ je u tački $T\left(\frac{-b}{2a}, \frac{-D}{4a}\right)$

$$T\left(\frac{3}{2}, \frac{-25}{4}\right)$$

D>0, a>0 slijedi da je oblik funkcije

Znak funkcije:

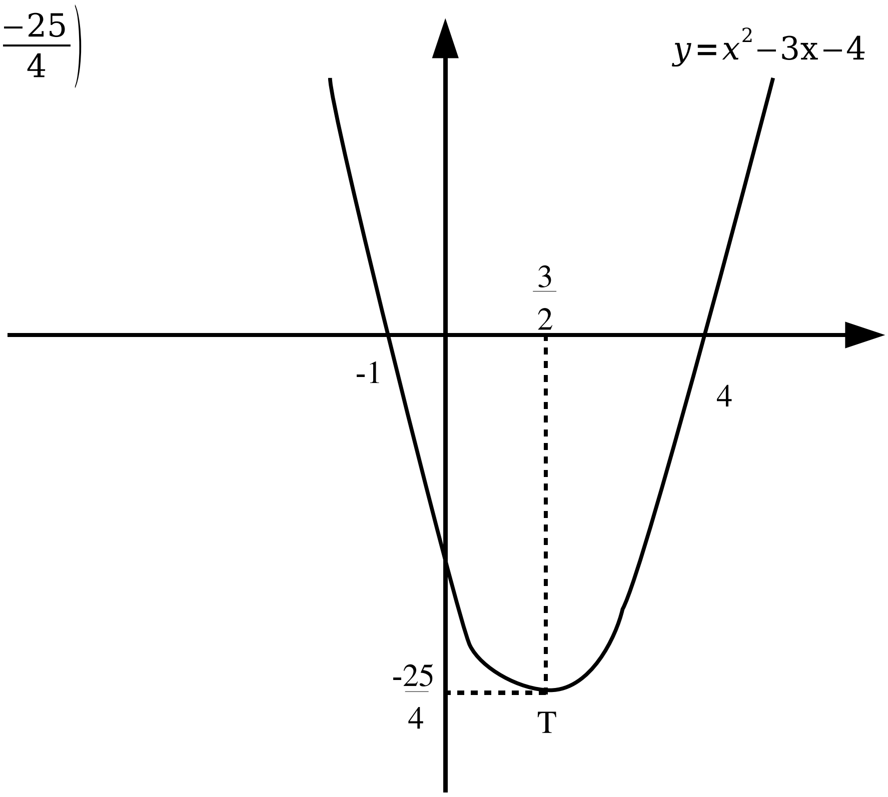
$$y = x^2 - 3x - 4 \longrightarrow y>0 \longrightarrow x \in (-\infty, -1) \cup (4, +\infty)$$

$$y<0 \longrightarrow x \in (-1, 4)$$

Grafik:

y(0)=-4

Tjeme: $T\left(\frac{3}{2},\frac{-25}{4}\right)$




**2. zadatak:**

$$z=\frac{١-٢i}{١+i}-\frac{i}{٢-i}=\frac{(١-٢i)(٢-i)-i(١+i)}{(١+i)(٢-i)}$$

$$z=\frac{٢-i-٤i-٢-i+١}{٢-i+٢i+١}=\frac{١-٦i}{٣+i}\cdot\frac{٣-i}{٣-i}=\frac{٣-i-١٨i-٦}{١٠}$$

$$z=\frac{-٣-١٩i}{١٠}$$

Trigonometrijski oblik: $z=\rho\cdot(\cos\varphi+i\cdot\sin\varphi)$

Eksponencijalni oblik: $z=\rho e^{i\varphi}$

$$\rho=\sqrt{(\frac{-3}{10})^2+(\frac{-19}{10})^2}=\sqrt{\frac{9+361}{100}}=\sqrt{\frac{370}{100}}=\frac{\sqrt{370}}{10}$$

$$tg\varphi=\frac{y}{x}=\frac{\frac{-19}{10}}{\frac{-3}{10}}=\frac{19}{3}$$

$$z=x+iy$$

x<0, y<0, treći kvadrant

$$\varphi=arctg\frac{y}{x}+\pi=arctg\frac{19}{3}+\pi$$

$$z=\frac{\sqrt{370}}{10}\cdot[\cos(arctg\frac{19}{3}+\pi)+i\cdot\sin(arctg\frac{19}{3}+\pi)]$$

$$z=\frac{\sqrt{370}}{10}\cdot e^{i\cdot(arctg\frac{19}{3}+\pi)}$$

**3. zadatak:**

$$\sqrt{\frac{x^2-4x+3}{x-2}}<2$$

Definiciono područje:

$$\frac{x^2-4x+3}{x-2}\geqslant 0 \qquad\qquad \frac{(x-3)(x-1)}{x-2}\geqslant 0$$

$$x-2\neq 0$$

$$x\neq 2$$

Tabela:

| | - ∞ … 1 | 1 … 2 | 2 … 3 | 3 … + ∞ |
|---|---|---|---|---|
| x-1 | - | + | + | + |
| x-2 | - | - | + | + |
| x-3 | - | - | - | + |
| $\frac{(x-1)(x-3)}{x-2}$ | - | + | - | + |

Definiciono područje:

$x\in$ [1,2) ∪ [3,+ ∞)

Rješenje:

$$\sqrt{\frac{x^2-4x+3}{x-2}}<2 \quad /^2 \qquad \longrightarrow \qquad \frac{x^2-4x+3}{x-2}<4$$

$$\frac{x^2-4x+3-4(x-2)}{x-2}<0 \qquad \longrightarrow \qquad \frac{x^2-8x+11}{x-2}<0$$

Diskriminanta brojnika je $D=8^2-4\cdot 11=20$ , D>0, a=1>0

Nule funkcije $y=x^2-8x+11$ su

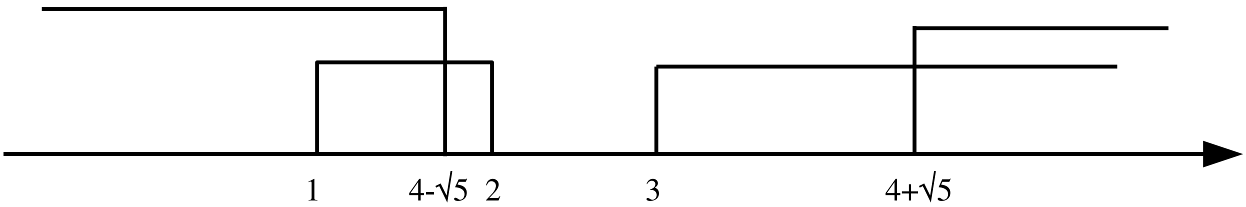
$$x_{1/2}=\frac{8\pm\sqrt{8^2-4\cdot 11}}{2}=\frac{8\pm\sqrt{20}}{2}=4\pm\sqrt{5}$$

$$x_1=4-\sqrt{5} \quad , \quad x_2=4+\sqrt{5}$$

$$4-\sqrt{5}<2 \quad ==> \text{ poredak je } \quad 4-\sqrt{5},\ 2,\ 4+\sqrt{5}$$

(1)

Konačno rješenje nejednačine dobije se presjekom uslova (1) sa definicionim područjem:




$$x\in\ [\ ١,٤-\sqrt{٥}\ )\ \cup\ [\ 3,4+\sqrt{5}\ )$$

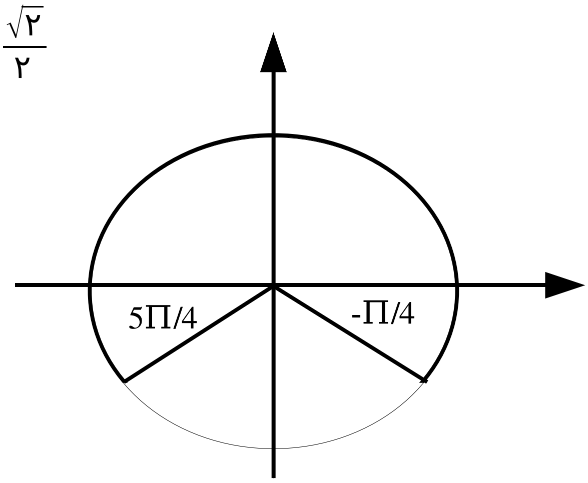
**4. zadatak:**

$$\cos4x+\sqrt{3}\sin4x>-\sqrt{2} \quad /:2$$

$$\cos٤x\cdot\frac{١}{٢}+\frac{\sqrt{٣}}{٢}\cdot\sin٤x>-\frac{\sqrt{٢}}{٢}$$

$$\cos٤x\cdot\sin\frac{\pi}{٦}+\cos\frac{\pi}{٦}\cdot\sin٤x>-\frac{\sqrt{٢}}{٢}$$

$$\sin(٤x+\frac{\pi}{٦})>-\frac{\sqrt{٢}}{٢}$$




Funkcija sinus je negativna u četvrtom i trećem kvadrantu pa je:

$$\arcsin(-\frac{\sqrt{٢}}{٢})=-\frac{\pi}{٤} \quad \wedge \quad \arcsin(-\frac{\sqrt{٢}}{٢})=\frac{٥\pi}{٤}$$

Sada je rješenje nejednačine:

$$-\frac{\pi}{٤}+٢k\pi<\frac{\pi}{٦}+٤x<\frac{٥\pi}{٤}+٢k\pi, \quad k\in\mathbb{Z}$$

$$-\frac{\pi}{٤}-\frac{\pi}{٦}+٢k\pi<٤x<\frac{٥\pi}{٤}-\frac{\pi}{٦}+٢k\pi$$

$$\frac{-5\pi}{12}+2k\pi<4x<\frac{13\pi}{12}+2k\pi$$

$$\frac{-5\pi}{48}+\frac{k\pi}{2}<x<\frac{13\pi}{48}+\frac{k\pi}{2}, \quad k\in\mathbb{Z}$$

**5. zadatak:**

p: $2x+y+m=0, \quad m\in\mathbb{R}$

k: $x^2+y^2-2x-2y-2=0$

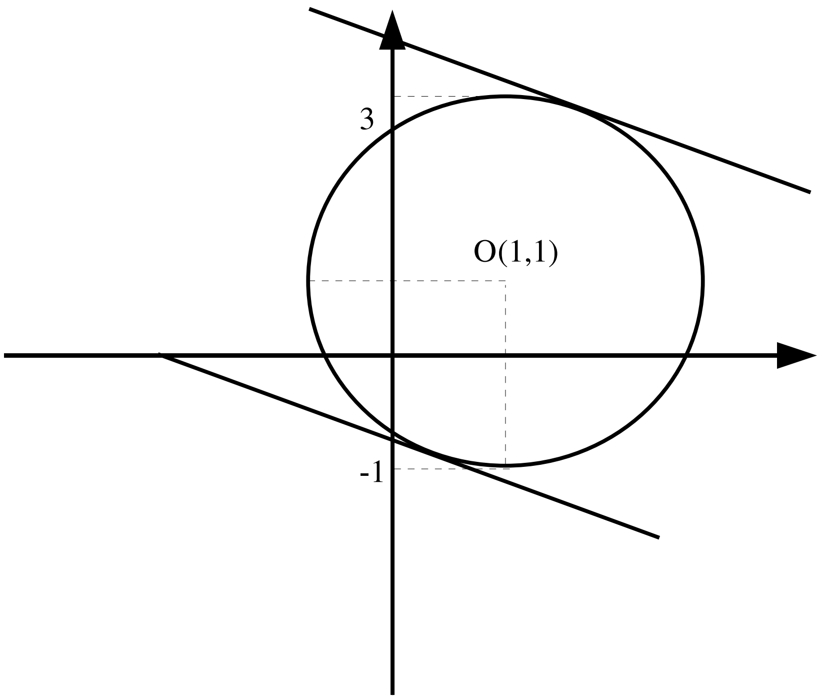
Jednačina prave: $y=-2x-m$

Jednačina kružnice: $(x-١)^٢+(y-١)^٢=٤$

Parametri prave: k=-2; n=-m

Parametri kružnice: p=1; q=1; r=2;

centar kružnice tačka O(1,1); poluprečnik kružnice r=2




Uslov da prava *p* bude tangenta kružnice *k*:

$$(kp-q+n)^2=r^2\cdot(k^2+1)$$

$$(-2\cdot1-1-m)^2=4\cdot(4+1)$$

$$(-3-m)^2=20$$

$$m^2+6m+9=20$$

$$m^2+6m-11=0$$

$$m_{1/2}=\frac{-6\pm\sqrt{36-4\cdot(-11)}}{2}=\frac{-6\pm\sqrt{80}}{2}$$

$$m_{1/2}=\frac{-6\pm\sqrt{16\cdot 5}}{2}=\frac{-6\pm 4\sqrt{5}}{2} \longrightarrow m_1=-3-2\sqrt{5}$$

$$m_2=-3+2\sqrt{5}$$

$p_1:\ y=-2x+3+2\sqrt{5}$

$p_2:\ y=-2x+3-2\sqrt{5}$