UNIVERZITET U SARAJEVU
Elektrotehnički fakultet u Sarajevu

Prijemni ispit (10.07.2006.) grupa A

Broj zadatka	Tekst zadataka
1.	Svesti na najjednostavniji oblik izraz $\left(2a+\frac{a^2+b^2}{b}\right):\left(a+\frac{b^2}{a+2b}\right)-\frac{a}{b}\left(1+b+\frac{2b}{a}\right)$.
2.	Odrediti sve vrijednosti parametra m, tako da svako od rješenja jednadžbe $(m-2)\,x^2-2\,m\,x+2\,m-3=0$, $(m\in\mathbf{R})$, bude pozitivno.
3.	Riješiti trigonometrijsku jednadžbu $\sin x+\sin 2x=\sin 3x$.
4.	Riješiti nejednadžbu $8^{\sqrt{5x-1}}>8^{x-5}$.
5.	Kroz tačku $M(6,1)$ postavljena je normala n na pravu p: $y=7x+9$. Presječna tačka normale n i prave p je tačka N. Naći jednadžbu kružnice K koja sadrži tačke M i N i dodiruje osu Ox.

Napomene:

- Svi zadaci se vrednuju isto, s maksimalno po 8 bodova.
- Na papiru u koverti se napiše ime i prezime, ubaci u kovertu i zalijepi. Na papirima **ne smije** biti napisano ime, prezime, šifra ili bilo koja druga karakteristična oznaka, nego samo rad zadataka.
- Privremeni rezultati prijemnog ispita bit će objavljeni 11.07.2006. u 16.00, u zgradi Elektrotehničkog fakulteta, ul.Zmaja od Bosne, bb., KAMPUS.

Komisija za prijem studenata na I godinu studija na Elektrotehnički fakultet u Sarajevu, školske 2006/2007 godine

OVAJ DIO POPUNJAVA KOMISIJA

IME I PREZIME KANDIDATA	BROJ BODOVA PO ZADACIMA					UKUPAN BROJ BODOVA
	1	2	3	4	5	

VARIJANTA A

1. (Ovdje se pretpostavlja da su izrazi kojima dijelimo različiti od nule, tj. da je:

$$a \neq 0, \quad b \neq 0, \quad a + 2b \neq 0, \quad a + \frac{b^2}{a+2b}\left(= \frac{(a+b)^2}{a+2b}\right) \neq 0, \quad \textit{odnosno} \quad a + b \neq 0.$$

Izvršavajući naznačene operacije, uz pretpostavku da su izrazi kojima dijelimo različiti od nule, dobijemo:

$$\left(2a + \frac{a^2+b^2}{b}\right) : \left(a + \frac{b^2}{a+2b}\right) - \frac{a}{b}\left(1 + b + \frac{2b}{a}\right) =$$

$$= \frac{2ab + a^2 + b^2}{b} : \frac{a^2 + 2ab + b^2}{a+2b} - \frac{a}{b} \cdot \frac{a + ab + 2b}{a} =$$

$$= \frac{(a+b)^2}{b} \cdot \frac{a+2b}{(a+b)^2} - \frac{a + 2b + ab}{b} =$$

$$= \frac{a+2b}{b} - \frac{a+2b+ab}{b} =$$

$$= -\frac{ab}{b} = -a\,.$$

2. **1°** Za $m = 2$ zadana jednadžba se svodi na linearnu jednadžbu $-4x + 1 = 0$, koja ima samo jedno rješenje $x = \frac{1}{4}$ i ono je pozitivno.

2° Za rješenja x_1, x_2 kvadratne jednadžbe $ax^2 + bx + c = 0$ vrijedi ekvivalencija:

$$(x_1 > 0 \quad \wedge \quad x_2 > 0) \quad \Leftrightarrow \quad \left(D \geq 0 \quad \wedge \quad \frac{b}{a} < 0 \quad \wedge \quad \frac{c}{a} > 0\right),$$

(gdje je $D = b^2 - 4ac$ diskriminanta), tj. potrebni i dovoljni uslovi da bi rješenja date jednažbe bila pozitivna su

$$4m^2 - 4(m-2)(2m-3) \geq 0 \quad \wedge \quad \frac{-2m}{m-2} < 0 \quad \wedge \quad \frac{2m-3}{m-2} > 0,$$

odnosno

$$m^2 - 7m + 6 \leq 0 \quad \wedge \quad \frac{m}{m-2} > 0 \quad \wedge \quad \frac{2m-3}{m-2} > 0\,.$$

Odavde se dobiju uslovi (jer je $m^2 - 7m + 6 \equiv (m-1)(m-6)$)

$$(1 \leq m \leq 6) \quad \wedge \quad (m < 0 \vee m > 2) \quad \wedge \quad \left(m < \frac{3}{2} \vee m > 2\right),$$

odakle slijedi da $m \in (2, 6]$.

3° Iz **1°** i **2°** slijedi da svaki $m \in [2, 6]$ zadovoljava uslove zadatka.

3. Prema poznatim identitetima (u **R**) $\sin\varphi = 2\sin\frac{\varphi}{2}\cos\frac{\varphi}{2}$,

$\sin\alpha - \sin\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$ zadana jednažba je ekvivalentna sa jednažbom

$\sin 2x + \sin x - \sin 3x = 0$, $2\sin x\cos x - 2\sin x\cos 2x = 0$,
odnosno sa

$$2\sin x(\cos x - \cos 2x) = 0. \qquad (1)$$

Jednadžba (1) je ekvivalentna sa

$$\sin x = 0 \quad \vee \quad \cos x = \cos 2x \qquad (2)$$

Skup svih rješenja prve jednažbe (2) je zadan sa

$$x = k\pi, \quad (k \in Z) \qquad (3)$$

a skup svih rješenja druge jednažbe (2) je zadan sa

$$x = l\pi \quad (l \in Z), \quad \vee \quad x = \frac{2m\pi}{3} \quad (m \in Z). \qquad (4)$$

Sva rješenja date jednadžbe su: $x = n\pi \quad \vee \quad x = \frac{2n\pi}{3} \quad (n \in Z)$.

4. Data nejednažba je ekvivalentna skupu od dva sistema nejednažbi:

$$(S_1)\begin{cases} 5x - 1 \geq 0, \\ x - 5 < 0 \end{cases} \qquad \vee \qquad (S_2)\begin{cases} 5x - 1 \geq 0, \\ x - 5 \geq 0, \\ 5x - 1 > (x-5)^2 \end{cases}$$

Skup rješenja sistema (S_1) je dat sa $\mathcal{R}(S_1) = \left[\frac{1}{5}, 5\right)$.

Primijetimo da je u sistemu (S_2) uslov $5x - 1 \geq 0$ suvišan, jer je isti sadržan u uslovu $5x - 1 > (x-1)^2$ (budući da je $(x-5)^2 \geq 0$ za svaki realni broj x). Zato se sistem (S_2) svodi na sistem nejednadžbi

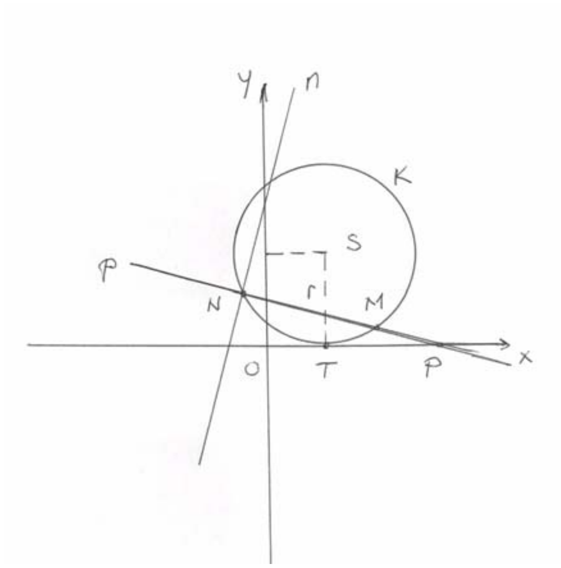
$$x - 5 \geq 0 \quad \wedge \quad x^2 - 15x + 26 < 0. \qquad (*)$$

Rješenja $x_{1,2}$ jednadžbe $x^2 - 15x + 26 = 0$ su $x_1 = 2, \quad x_2 = 13$ pa su sva rješenja nejednadžbe $x^2 - 15x + 26 < 0$ data sa $2 < x < 13$. Otuda slijedi da je skup svih rješenja sistema (*), odnosno sistema (S_2) dat sa: $\mathcal{R}(S_2) = [5, 13)$.

Dakle skup svih rješenja $\mathcal{R}$ date nejednažbe je dat sa:

$$\mathcal{R}(S) = \mathcal{R}(S_1) \cup \mathcal{R}(S_2) = \left[\frac{1}{5}, 13\right).$$

5.



Sl. 1

Normala n na pravu p ima jednadžbu $x + 7y - 13 = 0$, pa je N (-1,2). Neka je T tačka dodira kružnice K sa osom Ox (sl. 1). Tada tačka T ima koordinate p i 0, a centar kružnice K je S (p,r).

Uočimo presječnu tačku P (13,0) prave $\overline{MN}$ sa osom Ox.

Na osnovu svojstva potencije tačke P prema traženoj kružnici K, važi jednakost: $\overline{PM} \cdot \overline{PN} = \overline{PT}^2$. Kako je $\overline{PM} = 5\sqrt{2}$ i $\overline{PN} = 10\sqrt{2}$ (rastojanje između dvije tačke), to je $\overline{PT}^2 = 100$, odnosno $\overline{PT} = 10$. Dakle, dobili smo T (3,0), pa je tražena jednadžba kružnice K:

$$(x-3)^2 + (y-r)^2 = r^2,$$

Uvrštavanjem vrijednosti koordinata tačke N u prethodnu jednadžbu dobijemo $r = 5$, pa kružnica K ima jednadžbu

$$(x-3)^2 + (y-5)^2 = 25.$$

Drugo rješenje je : T (23,0), $r = 145$, $(x-23)^2 + (y-145)^2 = 145^2$.