UNIVERZITET U SARAJEVU
Elektrotehnički fakultet u Sarajevu

Prijemni ispit (10.07.2006.)　　　　grupa B

Broj zadatka	Tekst zadataka
1.	Svesti na najjednostavniji oblik izraz $\frac{(a+b)^2}{a}:\left(b+\frac{a^2}{2a+b}\right)-\frac{b}{a}\left(1+a+\frac{2a}{b}\right).$
2.	Odrediti sve vrijednosti parametra m, tako da svako od rješenja jednadžbe $(m-2)\,x^2-2\,m\,x+2\,m-3=0$, $(m\in\mathbf{R})$, bude negativno.
3.	Riješiti trigonometrijsku jednadžbu $\cos x+\cos 2x+\cos 3x=0$.
4.	Riješiti nejednadžbu $8^{\sqrt{5x-1}}\le 8^{x-5}$.
5.	Odrediti jednadžbu prave p koja sadrži tačku $A(14,2)$ i siječe kružnicu K: $(x-1)^2+(y-2)^2=13$ pod uglom od 45°.

Napomene:
- Svi zadaci se vrednuju isto, s maksimalno po 8 bodova.
- Na papiru u koverti se napiše ime i prezime, ubaci u kovertu i zalijepi. Na papirima **<u>ne smije</u>** biti napisano ime, prezime, šifra ili bilo koja druga karakteristična oznaka, nego samo rad zadataka.
- Privremeni rezultati prijemnog ispita bit će objavljeni 11.07.2006. u 16.00, u zgradi Elektrotehničkog fakulteta, ul.Zmaja od Bosne, bb., KAMPUS.

Komisija za prijem studenata na I godinu studija na Elektrotehnički fakultet u Sarajevu, školske 2006/2007 godine

OVAJ DIO POPUNJAVA KOMISIJA

IME I PREZIME KANDIDATA	BROJ BODOVA PO ZADACIMA					UKUPAN BROJ BODOVA
	1	2	3	4	5	

VARIJANTA B

1. (Ovdje se pretpostavlja da su izrazi kojima dijelimo različiti od nule, tj. da je:

$$a \neq 0, \quad b \neq 0, \quad 2a+b \neq 0, \quad b+\frac{a^2}{2a+b}\left(=\frac{(a+b)^2}{2a+b}\right) \neq 0, \quad \textit{odnosno} \quad a+b \neq 0.$$

Izvršavajući naznačene operacije, uz pretpostavku da su izrazi kojima dijelimo različiti od nule, dobijemo:

$$\frac{(a+b)^2}{a}:\left(b+\frac{a^2}{2a+b}\right)-\frac{b}{a}\left(1+a+\frac{2a}{b}\right)=$$

$$=\frac{(a+b)^2}{a}:\frac{a^2+2ab+b^2}{2a+b}-\frac{b}{a}\cdot\frac{b+ab+2a}{b}=$$

$$=\frac{(a+b)^2}{a}\cdot\frac{2a+b}{(a+b)^2}-\frac{2a+b+ab}{a}=$$

$$=\frac{2a+b}{a}-\frac{2a+b+ab}{a}=$$

$$=-\frac{ab}{a}=-b.$$

2. **1°** Za $m=2$ zadana jednadžba se svodi na linearnu jednadžbu $-4x+1=0$, koja ima samo jedno rješenje $x=\frac{1}{4}$ i ono je pozitivno.

2° Za rješenja x_1, x_2 kvadratne jednadžbe $ax^2+bx+c=0$ vrijedi ekvivalencija:

$$(x_1<0 \quad \wedge \quad x_2<0) \quad \Leftrightarrow \quad \left(D \geq 0 \quad \wedge \quad \frac{b}{a}>0 \quad \wedge \quad \frac{c}{a}>0\right),$$

(gdje je $D=b^2-4ac$ diskriminanta), tj. Potrebni i dovoljni uslovi da bi rješenja date jednažbe bila pozitivna su

$$4m^2-4(m-2)(2m-3) \geq 0 \quad \wedge \quad \frac{-2m}{m-2}>0 \quad \wedge \quad \frac{2m-3}{m-2}>0,$$

odnosno

$$m^2-7m+6 \leq 0 \quad \wedge \quad \frac{m}{m-2}<0 \quad \wedge \quad \frac{2m-3}{m-2}>0.$$

Odavde se dobiju uslovi (jer je $m^2-7m+6 \equiv (m-1)(m-6)$)

$$(1 \leq m \leq 6) \quad \wedge \quad (m>0 \wedge m<2) \quad \wedge \quad \left(m<\frac{3}{2} \vee m>2\right),$$

odakle slijedi da $m \in \left[1, \frac{3}{2}\right)$.

3. Prema poznatom identitetu (u **R**), $\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$ zadana jednažba je ekvivalentna sa jednažbom

$\cos 2x + \cos x + \cos 3x = 0$, $\quad \cos 2x + 2\cos x \cos 2x = 0$,

odnosno sa

$$\cos 2x(1 + 2\cos x) = 0. \tag{1}$$

Jednadžba (1) je ekvivalentna sa

$$\cos 2x = 0 \quad \vee \quad \cos x = -\frac{1}{2}. \tag{2}$$

Skup svih rješenja prve jednažbe (2) je zadan sa

$$x = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}, \quad (k \in Z). \tag{3}$$

a skup svih rješenja druge jednažbe (2) je zadan sa

$$x = \pm\frac{2\pi}{3} + 2l\pi \quad (l \in Z). \tag{4}$$

Sva rješenja date jednadžbe su: $x = \frac{\pi}{4} + \frac{n\pi}{2} \quad \vee \quad x = \pm\frac{2\pi}{3} + 2n\pi \quad (n \in Z).$

4. Data nejednažba je ekvivalentna skupu nejednažbi:

$$(S)\begin{cases} 5x - 1 \geq 0, \\ x - 5 \geq 0, \\ 5x - 1 \leq (x-5)^2 \end{cases}$$

Sistem (S) svodi se na sistem nejednadžbi

$5x - 1 \geq 0 \quad \wedge \quad x - 5 \geq 0 \quad \wedge \quad x^2 - 15x + 26 \geq 0$

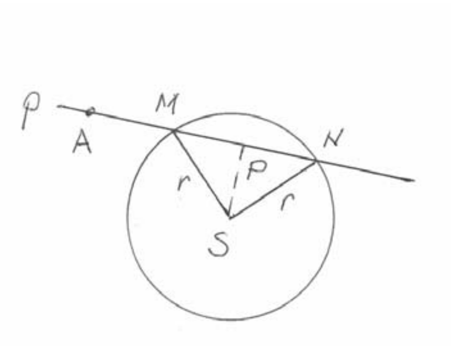
Rješenja $x_{1,2}$ jednadžbe $x^2 - 15x + 26 = 0$ su $x_1 = 2, \quad x_2 = 13$, pa su sva rješenja nejednadžbe $x^2 - 15x + 26 \geq 0$ data sa $x \leq 2 \quad \vee \quad x \geq 13$.

Dakle skup svih rješenja $\mathcal{R}$ date nejednažbe je dat sa:

$x \geq \frac{1}{5} \quad \wedge \quad x \geq 5 \quad \wedge \quad (x \leq 2 \quad \vee \quad x \geq 13)$,

Odnosno $\mathcal{R}(S) = [13, +\infty)$.

5.



Sl. 2

Prava p sa poluprečnikom kružnice K u tački presjeka, obrazuje ugao od 45°. Ako su M i N presječne tačke prave p i kružnice K, onda je trougao SMN pravougli jednakokraki (sl. 2).

Njegova visina je $\overline{SP} = r\dfrac{\sqrt{2}}{2} = \dfrac{\sqrt{26}}{2}$. Sada treba kroz tačku A postaviti pravu koja je od centra $S(1,2)$ zadane kružnice K udaljena $\dfrac{\sqrt{26}}{2}$.

Dobiju se rješenja:

$p: \quad x - 5y - 4 = 0$, odnosno $p: \quad x + 5y - 24 = 0$

(koristi se jednadžba pravca p kroz zadanu tačku

$p: \quad y - y_A = k(x - x_A)$, tj. $p: \quad kx - y + 2 - 14k = 0$

a vrijednost za k se dobije iz izraza za rastojanje tačke S od prave p:

$$\frac{\sqrt{26}}{2} = \frac{|k \cdot 1 - 2 + 2 - 14k|}{\sqrt{k^2 + 1}},$$

odakle je $k = \pm\dfrac{1}{5}$).